# Die Funktion $\mathbf{f(x) = a \cdot \ln(bx + c) + d}$
## Übung

1. Bestimmen Sie jeweils maximale Definitionsmenge $D_{max}$, Gleichung der senkrechten Asymptote sowie die Nullstelle. •◦◦

   a) $f(x) = \ln(2x - 4)$

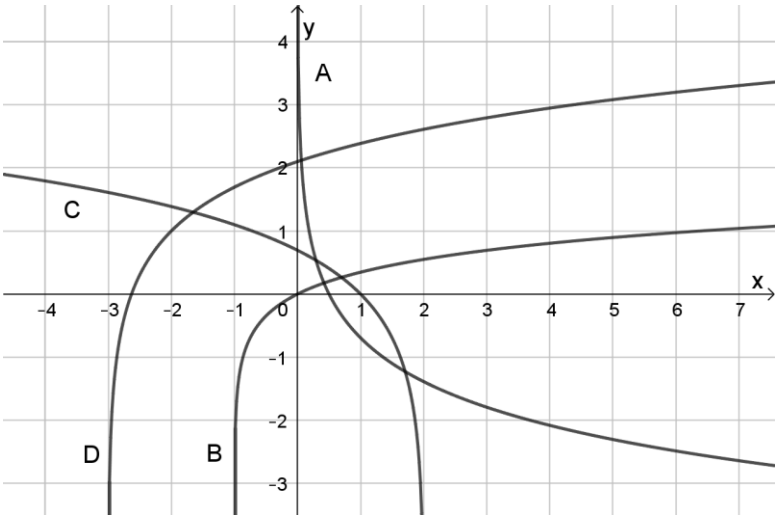
   b) $f(x) = 2 \cdot \ln(x - 3) + 1$

   c) $f(x) = 3 \cdot \ln\left(-\frac{1}{4}x\right)$

   d) $f(x) = -2 \cdot \ln(3x + 4) + 5$

2. Gegeben sind die Funktionen $f_1$ bis $f_4$ in ihrer maximalen Definitionsmenge sowie die Funktionsgraphen A bis D.

   ① $f_1(x) = \ln(-x + 2)$
   ② $f_2(x) = \ln(x + 3) + 1$
   ③ $f_3(x) = 2\ln(x)$
   ④ $f_4(x) = 0{,}5 \cdot \ln(x + 1)$



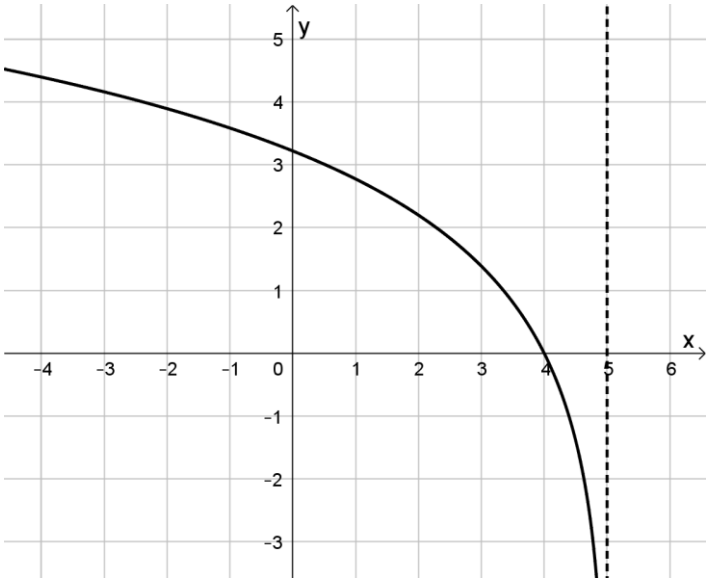

   a) Drei der Funktionen entsprechen jeweils drei der Graphen. Ordnen Sie diese mit Begründung zu.
   Geben Sie einen Funktionsterm zum verbleibenden Graphen an und skizzieren Sie den Graphen zum übrigen Term.

   b) Berechnen Sie die Stelle $x_1$, an der der Graph von Funktion $f_1$ die Steigung $-2$ besitzt.

3. Nennen Sie zwei Zahlenkombinationen für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass die zugehörige Funktion $f(x) = a \cdot \ln(bx + c) + d$ eine Nullstelle bei $x_1 = 2$ besitzt. •••

© 2025 www.einfach-mathe-lernen.de

4. In unterem Graphen ist eine Funktion mit dem Term $f(x) = a \cdot \ln(bx + c) + d$ zu sehen. Ermitteln Sie die Werte von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und begründen Sie Ihre Entscheidung. Der Graph wurde gegenüber der ln-Funktion in y-Richtung nicht verschoben und in x-Richtung nicht gestreckt/gestaucht. Die y-Achse wird bei $y = 2\ln(5)$ geschnitten. •••




5. Bilden Sie die zweite Ableitung folgender Funktionen.

   a) $f(x) = \ln(3x)$

   b) $f(x) = \ln(x - 1) - 2$

   c) $f(x) = -4\ln(2x + 3) - 1$

   d) $f(x) = -\ln(5 - x) + 7$

6. Zeigen Sie, dass die Art des Krümmungsverhaltens des Graphen von

$$f(x) = a \cdot \ln(bx + c) + d \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ und } a, b \neq 0$$

   lediglich vom Parameter a abhängt. •••

7. Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = 3 \cdot \ln(0{,}5x + 2) + 1$ nach folgenden Kriterien. •••

   - maximale Definitionsmenge
   - Symmetrie
   - Nullstellen
   - Globalverlauf
   - lokale Extrema und Monotonie
   - Krümmung und Wendepunkte
   - Graph

© 2025 www.einfach-mathe-lernen.de

## Die Funktion $\mathbf{f(x) = a \cdot \ln(bx + c) + d}$
## Lösung

1.

a) $D_{max} = ]2; \infty[$, senkrechte Asymptote $x = 2$, Nullstelle $x_1 = \frac{5}{2}$.

b) $D_{max} = ]3; \infty[$, senkrechte Asymptote $x = 3$, Nullstelle $x_1 = e^{-\frac{1}{2}} + 3 \approx 3{,}61$.

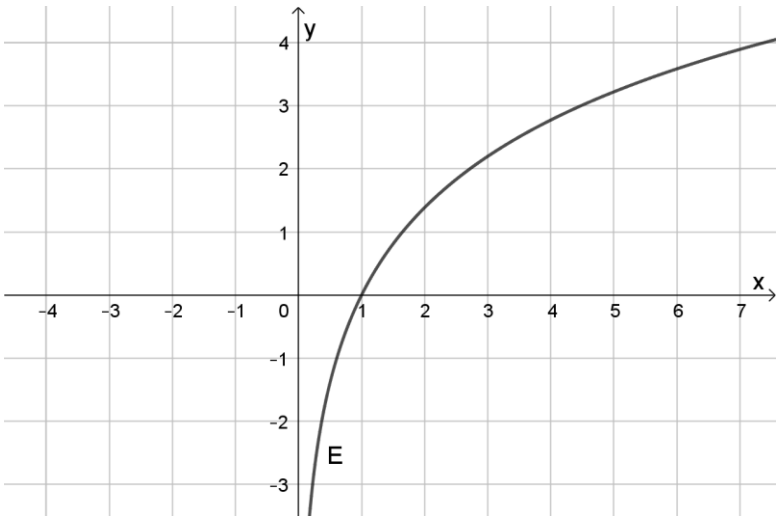
c) $D_{max} = ]-\infty; 0[$, senkrechte Asymptote $x = 0$, Nullstelle $x_1 = -4$.

d) $D_{max} = ]-\frac{4}{3}; \infty[$, senkrechte Asymptote $x = -\frac{4}{3}$, Nullstelle $x_1 = \frac{e^{\frac{5}{2}} - 4}{3} \approx 2{,}73$.

2.

a) ① $f_1(x)$ entspricht Graph C, da Nullstelle bei $x = 1$.
② $f_2(x)$ entspricht D, der Graph ist um 3 nach links und um 1 nach oben verschoben.
③ $f_3(x)$ ist nicht dargestellt.
④ $f_4(x)$ entspricht B, weil der Graph den Koordinatenursprung enthält.

Graph A besitzt den Funktionsterm $f_5(x) = -\ln(2x)$.
Graph von $f_3$:




b) $f_1'(x) = \frac{-1}{-x+2}$
$f_1'(x) = -2 \Leftrightarrow \frac{-1}{-x+2} = -2$
$x_1 = \frac{3}{2}$

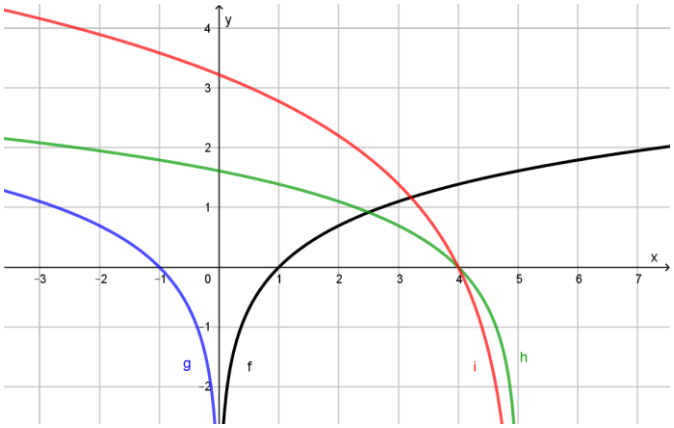
3. Die von den Parametern abhängige Nullstelle der Funktion lautet $x_1 = \frac{1}{b} \cdot (e^{-\frac{d}{a}} - c)$.
Daher sind einfache Beispiele solche mit $d = 0$ wie z.B. $a = 1, b = \frac{1}{2}, c = 0, d = 0$ oder $a = 7, b = 1, c = -1, d = 0$.

© 2025 www.einfach-mathe-lernen.de

4.

- Keine Verschiebung in y-Richtung: $d = 0$.
- Graph nicht in x-Richtung gestreckt: $|b| = 1$. Da der Graph allerdings links von der y-Achse verläuft, muss er gespiegelt sein und es ist $b = -1$.
- Graph wurde vor dem Spiegeln um 5 nach links verschoben: $c = 5$.
- Der Graph von $f(x) = \ln(-x + 5)$ schneidet die y-Achse bei $\ln(5) \approx 1{,}61$. Damit er sie bei $y = 2\ln(5)$ schneidet, muss $a = 2$ sein.

$$a = 2, b = -1, c = 5, d = 0, \text{damit ist } f(x) = 2 \cdot \ln(-x + 5)$$




Schwarz: $f(x) = \ln(x)$
Blau: $g(x) = \ln(-x)$
Grün: $h(x) = \ln\big(-(x-5)\big) = \ln(-x+5)$
Rot: $i(x) = 2 \cdot \ln(-x+5)$

5.

a) $f'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$; $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$

b) $f'(x) = \frac{1}{x-1}$; $f''(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$

c) $f'(x) = \frac{-8}{2x+3}$; $f''(x) = \frac{16}{(2x+3)^2}$

d) $f'(x) = \frac{1}{5-x}$; $f''(x) = \frac{1}{(5-x)^2}$

6. Für $f(x) = a \cdot \ln(bx + c) + d$ ist $f'(x) = \frac{ab}{bx+c}$ und $f''(x) = \frac{-ab^2}{(bx+c)^2}$. Da sowohl $b^2$, als auch der Nenner $(bx + c)^2$ von $f''(x)$ positiv sind, hängt das Vorzeichen von $f''(x)$ ausschließlich von a ab: Für $a < 0$ ist der Graph $G_f$ linksgekrümmt, für $a > 0$ rechtsgekrümmt.

© 2025 www.einfach-mathe-lernen.de

7. Kurvendiskussion von $f(x) = 3\ln(0{,}5x + 2) + 1$ • Teil 1 https://youtu.be/BJKMDE_bgxI

Kurvendiskussion von $f(x) = 3\ln(0{,}5x + 2) + 1$ • Teil 2 https://youtu.be/5J9FscsNO0U

Kurvendiskussion von $f(x) = 3\ln(0{,}5x + 2) + 1$ • Teil 3 https://youtu.be/fEogeFB8v8M

© 2025 www.einfach-mathe-lernen.de