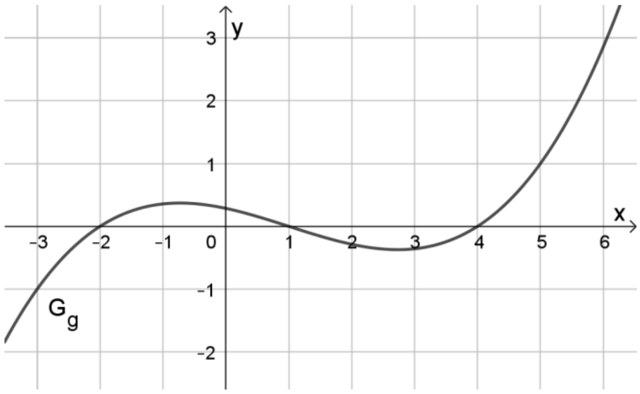
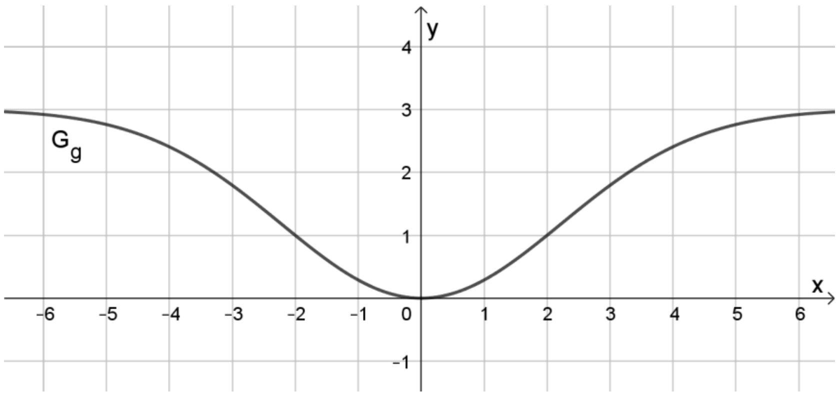
Funktionen der Form $\mathbf{f(x) = \ln\big(g(x)\big)}$
Übung

1. In unterem Bild ist der Graph der Funktion g mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$ zu sehen. Dazu wird nun die Funktion $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$ betrachtet. Geben Sie ohne Rechnung die maximale Definitionsmenge D_f sowie die Nullstelle der Funktion f an.



2. Der unten dargestellte Graph G_g der Funktion g besitzt die Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$ sowie eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 3$.
Im Folgenden wird die Funktion $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$ betrachtet.



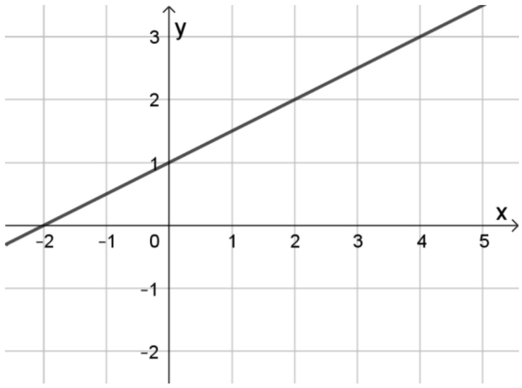
a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge sowie Nullstellen und Globalverlauf der Funktion $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$ an.

b) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f. Begründen Sie die Tatsache, dass f keine lokalen Extrema besitzt.

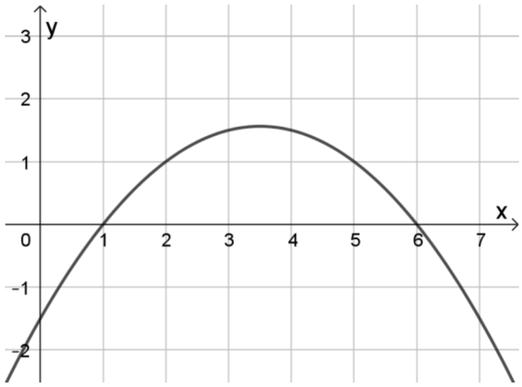
c) Prüfen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f und geben Sie gegebenenfalls die Art der Symmetrie an.

3. Zeichnen Sie den jeweils den Graphen von $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$ ein, wenn der Graph von g abgebildet ist.

a)



b)



4. Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktionen, falls vorhanden. Geben Sie gegebenenfalls deren Art an.

a) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

b) $f(x) = \ln(-x^2 + 4x)$

c) $f(x) = \ln(e^x + 1)$

d) $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$

5. Wahr (w) oder falsch (f) für die Funktion $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

   a) Die Lösungsmenge der Ungleichung $g(x) \geq 0$ entspricht der maximalen Definitionsmenge von f.

   b) Die Stellen, an denen $g(x) = 1$ gilt, sind die Nullstellen von $f(x)$.

   c) Alle Stellen, an denen g eine Nullstelle besitzt, hat f eine senkrechte Asymptote.

   d) Wenn $g(x)$ eine konstante Funktion ist, dann ist $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$ ebenfalls konstant.

   e) Der Graph der Funktion $f(x)$ hat niemals eine Asymptote.

   f) Die Ableitung der Funktion $f(x)$ ist gegeben durch $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$.

   g) Die Funktion $f(x)$ kann negative Werte annehmen, solange $g(x)$ negativ ist.

   h) Wenn $g(x)$ eine positive, streng monoton wachsende Funktion ist, dann ist auch die Funktion $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$ streng monoton wachsend.

   i) $f(x)$ hat immer ein Minimum, wenn auch $g(x)$ eines besitzt.

6. Begründen Sie rechnerisch: Der Graph der Funktion $f(x) = \ln\left(\frac{-x+4}{x+4}\right)$ ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

7. Zeigen Sie allgemein: Die Funktionen $g(x)$ und $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$ besitzen dieselben Extremstellen in der gemeinsamen Definitionsmenge!

Funktionen der Form $\mathbf{f(x) = \ln(g(x))}$
Lösung

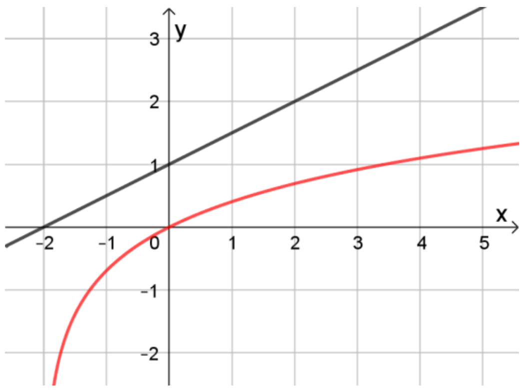
1. Bemerkung: Es ist $g(x) = \frac{1}{28}(x+2)(x-1)(x-4)$.
   Die maximale Definitionsmenge von f liegt dort, wo sich der Graph von g oberhalb der x-Achse befindet, also $D_f =]-2;1[\cup]4;\infty[$.
   Die Nullstelle von f befindet sich wegen $g(5) = 1$ bei $x_1 = 5$.

2.
   a) $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
      Nullstellen bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$
      $\lim_{x\to\infty} \ln(g(x)) = \ln(3)$
      $\lim_{x\to-\infty} \ln(g(x)) = \ln(3)$
      (Hinweis: Es ist $g(x) = 3 - 3e^{\frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{4}x^2}$)

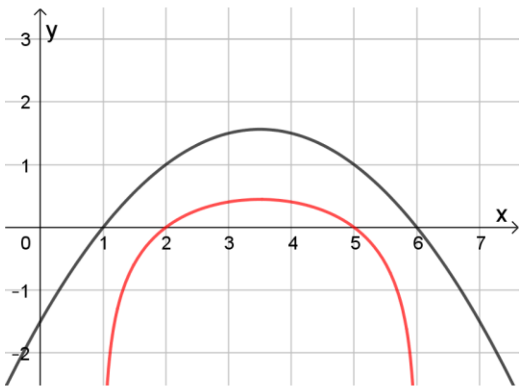
   b) G_f ist smf in $]-\infty;0[$ und sms in $]0;\infty[$.
      Der Graph besitzt keine Extrema, weil die einzige mögliche Stelle $x_3 = 0$ sich außerhalb des Definitionsbereichs befindet

   c) Es ist $g(-x) = g(x)$, daher muss auch $\ln(g(-x)) = \ln(g(x))$ sein.

3.
   a)



   b)



4.

a) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
$f'(x) = \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2-1}$
$f'(x) = 0$ für $x_1 = 0$
Allerdings ist $g(0) = 0$, d.h. $x_1 = 0$ liegt nicht in der Definitionsmenge von f
f besitzt daher keine Extremstellen

b) $f(x) = \ln(-x^2 + 4x)$
$f'(x) = \frac{1}{-x^2+4x} \cdot (-2x + 4) = \frac{-2x+4}{-x^2+4x}$
$f'(x) = 0$ für $x_1 = 2$

x	$x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	−
G_f	↗	↘

f besitzt ein lokales Maximum bei $x_1 = 2$.

c) $f(x) = \ln(e^x + 1)$
$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ besitzt keine Nullstellen, daher kann f auch keine extremstellen besitzen.

d) $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$
$f'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+5}$
TIP(2; 0)

5.

a) f, die Lösung der Gleichung $g(x) > 0$ (ohne Gleichheitszeichen) entspricht der Definitionsmenge f.

b) w, weil die einzigen Nullstellen des natürlichen Logarithmus bei 1 liegen.

c) w, es gilt $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = 0$.

d) w, der natürliche Logarithmus einer Konstanten ist ebenfalls eine Konstante.

e) f, besitzt beispielsweise $g(x)$ eine waagrechte Asymptote bei $y = c > 0$, so besitzt $f(x)$ eine waagrechte Asymptote bei $\ln(c)$.

f) w, die Kettenregel mit $g(x)$ als innerer und $\ln(x)$ als äußerer Funktion führt zu diesem Ergebnis.

g) f, An den Stellen mit $g(x) < 0$ ist f nicht definiert. $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$ ist dort negativ, wo $0 < g(x) < 1$.

h) w, in der Ableitung $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ ist dann sowohl der Zähler als auch der Nenner positiv.

i) f, das Minimum von g muss positiv sein, damit es definiert ist.

6. $f(-x) = \ln\left(\frac{-(-x)+4}{(-x)+4}\right) = \ln\left(\frac{x+4}{-x+4}\right) = \ln\left(\left(\frac{-x+4}{x+4}\right)^{-1}\right) = -1 \cdot \ln\left(\frac{-x+4}{x+4}\right) = -f(x)$.
Der Exponent -1 kann hier mit den Logarithmusgesetzen nach vorne gezogen werden.

7.
- In der gemeinsamen Definitionsmenge muss gelten $g(x) > 0$.
- Es ist $f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$.
- Die Ableitungen $g'(x)$ und $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ besitzen dieselben Nullstellen sowie wegen $g(x) > 0$ überall dieselben Vorzeichen.