Gebrochen-rationale Funktionen • Anwendungen
Übung

1. Rakete

Nach dem Gravitationsgesetz von Newton aus dem Jahre 1686 ziehen sich zwei beliebige Körper mit der Kraft (in Newton N)

$$F(r) = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

an. Dabei sind

G	die Graviationskonstante mit $G = 6{,}674 \cdot 10^{-17} \frac{\mathrm{N \cdot km^2}}{\mathrm{kg^2}}$,
m_1, m_2	die Massen der beiden Körper in kg und
$r > 0$	der Abstand der beiden Massenschwerpunkte in km.

Die Erde hat eine Masse von $m_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg einen mittleren Radius von $r_E = 6\,371$ km. Runden Sie alle Ergebnisse sinnvoll, auf die Benennung von Einheiten kann bei der Rechnung verzichtet werden.

1.1. Zeigen Sie: Für eine Rakete der Masse $m_R = 200$ t herrscht in der Höhe h (in km) über der Erdoberfläche eine Kraft zwischen Erde und Rakete in Newton [N] von (3 BE)

$$F(h) = \frac{7{,}97 \cdot 10^{13}}{(h + 6\,371)^2}$$

Geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_F für $F(h)$ an.

1.2. Mit welcher Kraft ziehen sich die Erde und die Rakete der Masse $m_R = 200$ t an, die sich auf der Erdoberfläche befindet? Welche Kraft wirkt auf die Rakete von der Erde aus, wenn sie sich in 5 000 km Höhe über dem Boden befindet? (2 BE)

1.3. Begründen Sie rechnerisch: $F(h)$ ist streng monoton abnehmend in D_F. (3 BE)

1.4. Welche Kraft wirkt von der Erdkugel aus auf die Rakete für sehr große Abstände von der Erde? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis. (2 BE)

1.5. Bestimmen Sie die Höhe über der Erdoberfläche, in der die Rakete nur noch mit einer Kraft von 400 kN angezogen wird (1 kN = 1 000 N). (5 BE)

1.6. Berechnen Sie $F(10\,000)$ und $F(15\,000)$ und skizzieren Sie den Graphen der Funktion $F(h)$ für die Rakete, die sich im Abstand h vom Erdboden befindet ($0 \leq h \leq 15\,000$). Verwenden Sie einen sinnvollen Maßstab. (5 BE)

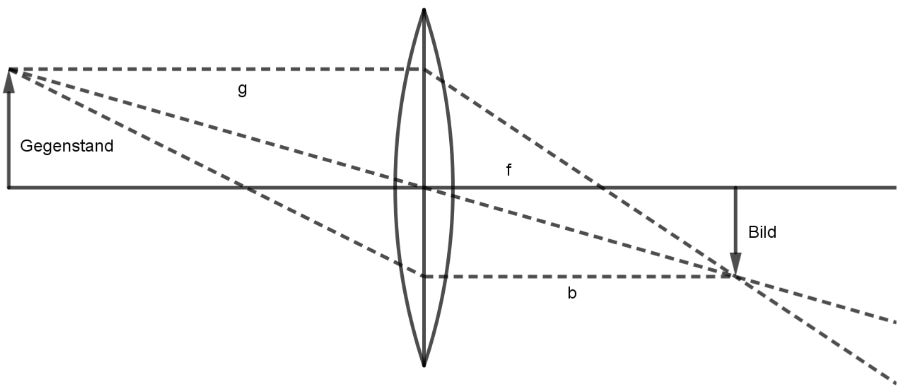
1.7. Um die Rakete aus dem Schwerefeld der Erde zu befördern, ist eine Energie in Höhe von $E = \int_0^\infty F(h)\,dh$ nötig. Berechnen Sie diesen Wert und interpretieren Sie das obere Integral in Ihrer Skizze aus 1.6. (5 BE)

2. Linsengleichung

Die Linsengleichung für eine optische Linse lautet

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

mit f Brennweite der Linse
b Bildweite (Abstand des Bildes von der Linse)
g Gegenstandsweite (Abstand des Gegenstandes von der Linse)



Rechnen Sie mit der Brennweite $f = 10$ cm für die Linse und verzichten Sie bei Ihren Rechnungen auf die Bezeichnung von Einheiten.

2.1. Berechnen Sie die Bildweite b für eine Gegenstandsweite von $g = 30$ cm. (3 BE)

2.2. Stellen Sie die Bildweite als Funktion b(g) der Gegenstandsweite $g > 0$ dar. [Lösung: $b(g) = \frac{10 \cdot g}{g-10}$] (3 BE)

2.3. Bestimmen Sie alle Asymptoten des Graphen von b(g). (2 BE)

2.4. Erstellen Sie eine geeignete Wertetabelle (zwei Nachkommastellen) von b(g) und skizzieren Sie ihren Graphen für $0 \leq g \leq 30$ in ein geeignetes Koordinatensystem ein. (5 BE)

2.5. Erläutern Sie, welcher Wert von b sich ergibt, falls man den Gegenstand sehr weit von der Linse entfernt. (2 BE)

3. Reihenschaltung von Kondensatoren

Für zwei in Reihe geschaltete Kondensatoren der Kapazität C_1 bzw. C_2 errechnet sich die Gesamtkapazität C_{ges} zu

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Die Einheit der Kapazität wird hier in pF (Pikofarad) angegeben, auf Benennung von Einheiten kann in der Rechnung verzichtet werden.

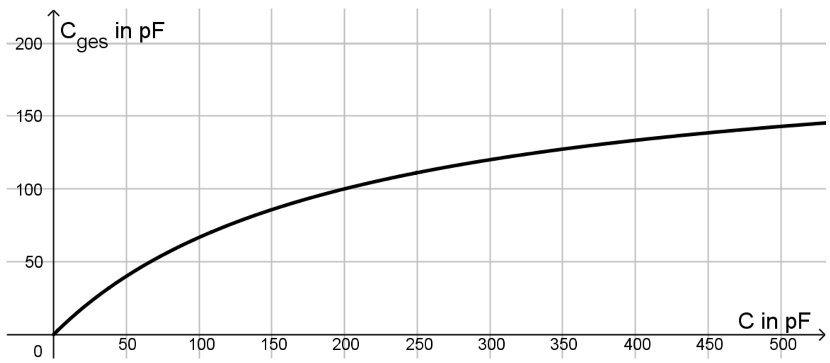
3.1. Bestimmen Sie C_{ges} für $C_1 = 100$ pF und $C_2 = 900$ pF. (2 BE)

3.2. Zeigen Sie: (3 BE)

$$C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

3.3. Einem Kondensator der Kapazität $C_1 = 200$ pF wird mit einem zweiten variablen Kondensator der Kapazität $C \geq 0$ in Reihe geschaltet. (3 BE)
Stellen Sie die Gesamtkapazität $C_{ges}(C)$ des Systems in Abhängigkeit von C dar und ermitteln Sie diese für sehr kleine und sehr große Werte von C.

3.4. Unteres Schaubild stellt den Graphen der Funktion $C_{ges}(C)$ aus Aufgabe 3.3. dar. Lesen Sie hieraus die Gesamtkapazität für $C = 200$ pF ab und berechnen Sie, für welchen Wert von C sich eine Gesamtkapazität von $C_{ges} = 150$ pF ergeben würde. (3 BE)



4. Jahresrendite

Wird ein angelegtes Kapital K_0 mit einer Jahresrendite von p verzinst, so erhält man nach einem Jahr einen Betrag von $K_1 = K_0 \cdot (1+p)$.
Beispielsweise erhält man aus 1 000 € bei $p = 3\% = 0{,}03$ nach einem Jahr einen Betrag von $1\,000\text{ €} \cdot (1+0{,}03) = 1\,030\text{ €}$.
Sie wollen nun innerhalb eines Jahres Millionär werden.

4.1. Begründen Sie rechnerisch, dass sich bei einem gewünschten Kapital von $K_1 = 1\,000\,000$ € ohne Verwendung von Einheiten als von p abhängiger Startwert ergibt: (2 BE)

$$K_0(p) = \frac{1\,000\,000}{1+p}.$$

Ermitteln Sie das benötigte Startkapital für eine jährliche Rendite von $p = 25\%$.

4.2. Berechnen Sie die zu $K_0 = 200\,000$ gehörende Rendite. (3 BE)

4.3. Eine sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $K_0(p)$ ist $D_{K_0} =]-1;\infty[$, die auch negative Werte für p zulässt. Interpretieren Sie solche negativen Werte, z.B. für $p = -0{,}2$ und skizzieren Sie den Graphen von K_0 für $-1 < p \leq 10$. (5 BE)

Gebrochen-rationale Funktionen • Anwendungen
Lösung

1. Rakete

Die Ergebnisse dieser Aufgabe werden größtenteils auf drei geltende Ziffern gerundet.

1.1. Einsetzen von G, $m_1 = m_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}$, $m_2 = m_R = 200\,000$ (in kg), sowie $r = 6\,371 + h$ in die gegebene Formel liefert die Behauptung.
Eine sinnvolle Definitionsmenge ist $D_F = [0; \infty[$.

1.2. Auf drei geltende Ziffern gerundet ergibt sich
$F(0) \approx 1\,960\,000$ (N)
$F(5\,000) \approx 616\,000$ (N)

1.3. $F'(h) = \frac{-1{,}594 \cdot 10^{14}}{(h+6\,371)^3} < 0$ für $h > 0$, also ist $F(h)$ streng monoton abnehmend.

1.4. $\lim\limits_{h \to \infty} F(h) = 0$
In sehr großer Höhe über der Erde wird die Anziehungskraft sehr klein.

1.5. Die Gleichung $\frac{7{,}97 \cdot 10^{13}}{(h+6\,371)^2} = 400\,000$ lässt sich in die quadratische Gleichung $h^2 + 12\,742h - 158\,660\,359 = 0$ umformen und besitzt die beiden Lösungen $h_1 \approx -20\,487$ sowie $h_2 \approx 7\,745$. Davon ist nur der zweite Wert sinnvoll, damit ist die gesuchte Höhe $h_2 \approx 7\,745$ km.

1.6. $F(10\,000) \approx 297\,000$
$F(15\,000) \approx 175\,000$

1.7. $E \approx 1{,}25 \cdot 10^{10}$ (N · km), das wären $1{,}25 \cdot 10^{13}$ J (Joule). Dieser Wert entspricht dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen G_F und der h-Achse, die sich im I. Quadranten bis ins Unendliche erstreckt.

2. Linsengleichung

2.1. Für $f = 10$ und $g = 30$ ergibt sich für $b = 15$ (cm).

2.2. $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$

$\frac{1}{b} = \frac{g}{fg} - \frac{f}{fg}$ (Erweitern auf den Hauptnenner)

$\frac{1}{b} = \frac{g-f}{fg}$ (Zusammenfassen)

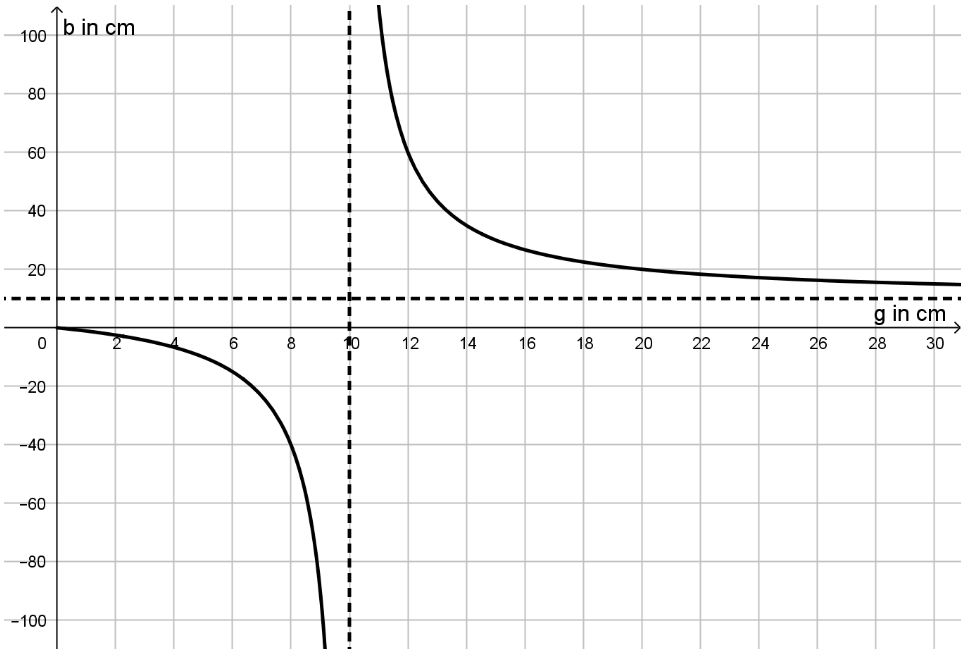
$b(g) = \frac{f \cdot g}{g-f}$ (Kehrbruch bilden)

2.3. $b(g) = \frac{10 \cdot g}{g-10}$

Senkrechte Asymptote bei $g = 10$, waagrechte Asymptote bei $b = 10$.

2.4.

g in cm	0	5	10	15	20	25	30
b in cm	0,00	-10,00	-	30,00	20,00	16,67	15



Hinweis: Im Bereich $0 \leq g < 10$ ergeben ich für b negative Werte. In diesem Fall befindet sich das Bild auf derselben Seite wie der Gegenstand und man spricht von einem imaginären Bild. Für $g = 10$ ergibt sich kein Bild, hier besitzt die Funktion eine Polstelle. Bei $g > 10$ entsteht ein sogenanntes reelles Bild auf der gegenüberliegenden Seite des Gegenstands.

2.5. Bei sehr großen Abständen des Gegenstands vom Bild, also $\lim\limits_{g \to \infty} \frac{10g}{g-10}$, nähert sich die Bildweite der Brennweite von $f = 10$ cm an.

3. Reihenschaltung von Kondensatoren

3.1. Für $C_1 = 100$ pF und $C_2 = 900$ pF ist $C_{ges} = 90$ pF.

3.2. $\frac{1}{C_{ges}} = \frac{C_2}{C_1 \cdot C_2} + \frac{C_1}{C_1 \cdot C_2} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 \cdot C_2}$.
Kehrwert dieser Gleichung ergibt die Behauptung $C_{ges} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

3.3. $C_1 = 200$ wird eingesetzt, C_2 wird zur Variablen C: $C_{ges}(C) = \frac{200 \cdot C}{200 + C}$
$C_{ges}(0) = 0$
$\lim\limits_{C \to \infty} \frac{200C}{200 + C} = 200$

3.4. Aus dem Graphen ergibt sich $C_{ges}(200) = 100$
Für $C_{ges} = 150$ errechnet man $C = 600$.

4. Jahresrendite

4.1. Einsetzen von $K_1 = 1\,000\,000$ und Teilen der Gleichung durch $(1 + p)$ liefert direkt das gewünschte Ergebnis.
$K(0{,}25) = \frac{1\,000\,000}{1+0{,}25} = 800\,000$

4.2. $200\,000 = \frac{1\,000\,000}{1+p}$;
$1 + p = \frac{1\,000\,000}{200\,000} = 5$; $p = 4 = 400\%$, ein leider recht unrealistischer Wert.

4.3. Negative p-Werte stellen einen Verlust dar, z.B. würde $p = -0{,}20$ einen Verlust von 20% für dieses Jahr bedeuten. Ein Verlust von mehr als 100% (also $p < -1$) kann nicht eintreten. Beachten Sie zum Zeichnen die bereits berechneten Werte.