Gebrochen-rationale Funktionen • Kurvendiskussion II
Übung

Diskutieren Sie die gebrochen-rationale Funktion $f\colon x \mapsto f(x)$ mit dem Funktionsterm

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x - 2}$$

auf folgende Kriterien:

1. Maximale Definitionsmenge
2. Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems
3. Nullstellen
4. Grenzverhalten an den Rändern der maximalen Definitionsmenge
5. Monotonie und Extrema
6. Krümmung und Wendepunkte
7. Graph im Bereich $x \in [-4; 7]$

Gebrochen-rationale Funktionen • Kurvendiskussion II
Lösung

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x - 2}$$

1. Maximale Definitionsmenge

$D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, da der Nenner $2x - 2$ nicht Null werden darf.

2. Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems

Der Funktionsgraph G_f kann allein wegen der Definitionsmenge nicht symmetrisch sein.

3. Nullstellen

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) = 0$
Der Ausdruck kann mit Hilfe der 2. binomischen Formel oder der Mitternachtsformel zerlegt werden zu $(x - 2)^2 = 0$, was die Lösung $x_1 = 2$ (doppelt) liefert.

4. Grenzverhalten an den Rändern der maximalen Definitionsmenge

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+4}{2x-2} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to1^-} \frac{x^2-4x+4}{2x-2} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^2-4x+4}{2x-2} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+4}{2x-2} = +\infty$

Bemerkung: Der Funktionsgraph G_f besitzt bei $x = 1$ eine senkrechte Asymptote und eine schräge Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. Die senkrechte Asymptote kann aus dem zweiten und dem dritten Grenzwert gefolgert werden, für die schräge Asymptote ist eine Polynomdivision nötig.

5. Monotonie und Extrema

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(2x - 2)^2}$$
Hinweis: Die Ableitung könnte tatsächlich noch um den Faktor 2 gekürzt werden.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0$
ergibt die Lösungen $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$.
Es bestehen damit waagrechte Tangenten an den Stellen $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$.

x	$x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
G_f	↗	↘	↘	↗

Hinweis: Die Definitionslücke bei $x = 1$ muss unbedingt auch bei der Vorzeichentabelle von $f'(x)$ beachtet werden, hier wäre ein Vorzeichenwechsel möglich.

G_f ist streng monoton steigend (sms) in $]-\infty; 0]$ bzw. $[2; \infty[$
und streng monoton fallend (smf) in $[0; 1[$ bzw. $]1; 2]$.

Relatives Maximum bei $HOP(0; -2)$,
relatives Minimum bei $TIP(2; 0)$.

6. Krümmung und Wendepunkte

$$f''(x) = \frac{8}{(2x-2)^3}$$

Hier könnte man sogar mit 8 kürzen. Bei den Krümmungsintervallen ist wieder die Definitionslücke zu beachten.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 8 = 0$ ergibt einen Widerspruch.

x	$x < 1$	$x > 1$
$f''(x)$	$-$	$+$
G_f	↻	↺

G_f ist rechtsgekrümmt (rk) in $]-\infty; 1[$
und linksgekrümmt (lk) in $]1; \infty[$.

Kein Wendepunkt.

7. Graph