

Gebrochen-rationale Funktionen mit Parameter Übung

1. Gegeben sind die gebrochen - rationalen Funktionen $f_a: x \mapsto f_a(x)$ durch

$$f_a(x) = \frac{ax^2 - a^2x}{(x-a)(x-2a)} \text{ mit } a \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0.$$

Der Graph einer Funktion f_a wird mit G_{f_a} bezeichnet. Die maximale Definitionsmenge von f_a wird mit $D_{\max}$ bezeichnet.

- Geben Sie $D_{\max}$ in Abhängigkeit vom Parameter a an. (2 BE)
- Berechnen Sie alle Nullstellen von f_a (2 BE)
- Ermitteln Sie alle Asymptoten von f_a (Lage und Art, mit Begründung). (3 BE)
- Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den G_{f_a} durch den Punkt $P(2; -\frac{1}{2})$ verläuft. (4 BE)

Sei nun $a = -1$ und $f_{-1}(x) = \frac{-(x^2+x)}{(x+1)(x+2)}$.

- Zeigen Sie: $G_{f_{-1}}$ besitzt keine gemeinsamen Punkte mit der Geraden $y = -1$. (4 BE)
- Geben Sie den Schnittpunkt von $G_{f_{-1}}$ mit der y - Achse an. Berechnen Sie $f_{-1}(-4)$ sowie $f_{-1}(4)$ und skizzieren Sie $G_{f_{-1}}$ in ein Koordinatensystem im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und ohne Berechnung weiterer Funktionswerte ein. (6 BE)

2. Betrachtet werden die gebrochen - rationalen Funktionen $f_b: x \mapsto f_b(x)$ mit

$$f_b(x) = \frac{-x^2 - bx + b}{2-x} \text{ mit } b \in \mathbb{R}$$

in der von b unabhängigen Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- Bestimmen Sie den Wert des Parameters b so, dass die Definitionslücke der zugehörigen Funktion f_b stetig hebbar ist. Geben Sie für diesen Wert von b den Term der stetigen Fortsetzung $\tilde{f}_b$ von f_b an! (4 BE)
- Bestimmen Sie Lage, Anzahl und Vielfachheit der Nullstellen von f_b in Abhängigkeit von b . (8 BE)
- Zeigen Sie: Für $b = -1$ berührt die Gerade $g: y = -2x + 1$ den Graphen der zugehörigen Funktion f_b an der Stelle $x_0 = 1$. (5 BE)
- Sei nun $b = -1$. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_{-1} an. (4 BE)

3. Gegeben sind die gebrochen – rationalen Funktionen $f_c: x \mapsto f_c(x)$ mit

$$f_c(x) = \frac{x^3 - 2cx^2 + c^2x}{(x-2)(x-2c)}; c \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}.$$

Die Graphen der Funktionen f_c werden mit G_{f_c} bezeichnet.

- a) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von c die maximale Definitionsmenge der Funktionen f_c und geben Sie die Art aller Definitionslücken an. Berechnen Sie ferner alle Nullstellen von f_c . (6 BE)

Ab hier wird $c = 2$ gesetzt.

- b) Bestimmen Sie für $c = 2$ die stetige Fortsetzung $\tilde{f}_2$ von f_2 sowie Art und Gleichung aller vorhandenen Asymptoten dieser Funktion. (7 BE)
- c) Zeichnen Sie die Asymptoten von f_2 im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ in ein Koordinatensystem ein. Tragen Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen G_{f_2} unter Berechnung geeigneter Funktionswerte mit ein. (5 BE)

4. Betrachtet werden die gebrochen – rationalen Funktionen $f_d: x \mapsto f_d(x)$ mit

$$f_d(x) = \frac{dx^2 + dx + 2}{dx}; d \in \mathbb{R} \text{ und } d \neq 0$$

in der von d unabhängigen Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- a) Ermitteln Sie die Art der Definitionslücke von f_d in Abhängigkeit von d . (2 BE)
- b) Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Nullstellen von f_d in Abhängigkeit von d . (7 BE)
- c) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Funktionen f_d dieselben Asymptoten besitzen. (3 BE)
- d) Berechnen Sie d so, dass die Gerade mit der Gleichung $g: y = -2x - 5$ ($D_g = \mathbb{R}$) Tangente an den Graphen der zugehörigen Funktion f_d ist. (6 BE)

Gebrochen – rationale Funktionen mit Parameter

Lösung

1.

a) $D_{\max} \setminus \{a; 2a\}$

b) Nullstellen bei $x_1 = 0$; $[x_2 = a \notin D_{\max}]$

c) Senkrechte Asymptote: $x = 2a$ (Polstelle 1. Ordnung)
 Waagrechte Asymptote: $y = a$ ($z = n = 2$)

d) $f_a(2) = -\frac{1}{2}$;

$$\frac{4a-2a^2}{(2-a)(2-2a)} = -\frac{1}{2}; a \neq 1 \text{ und } a \neq 2;$$

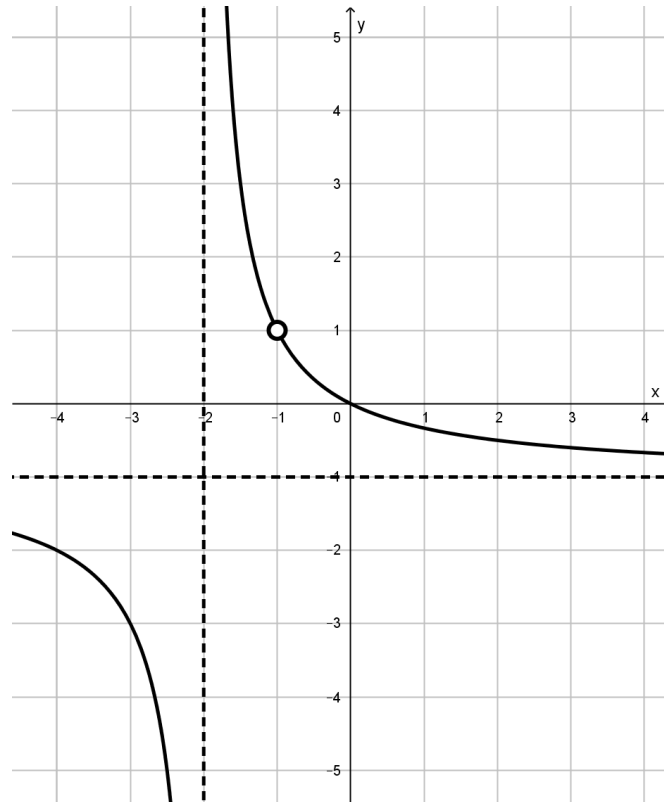
$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$a_1 = -1$$

$[a_2 = 2]$, dieser Wert kann nicht angenommen werden, weil ansonsten der Nenner Null würde.

e) Der Ansatz $f_{-1}(x) = -1$ ergibt die Gleichung $-x^2 - x = -x^2 - 3x - 2$.
 Diese besitzt die einzige Lösung $x_3 = -1$, was nicht im Definitionsbereich liegt.
 Folglich besitzt $G_{f_{-1}}$ keinen gemeinsamen Punkt mit der Waagrechten $y = -1$.

f) $S_y(0; 0); f_{-1}(-4) = -2; f_{-1}(4) = -\frac{2}{3} \approx -0,67$



2.

a) $z(2) = 0;$

$$-4 - 2b + b = 0$$

$$b = -4$$

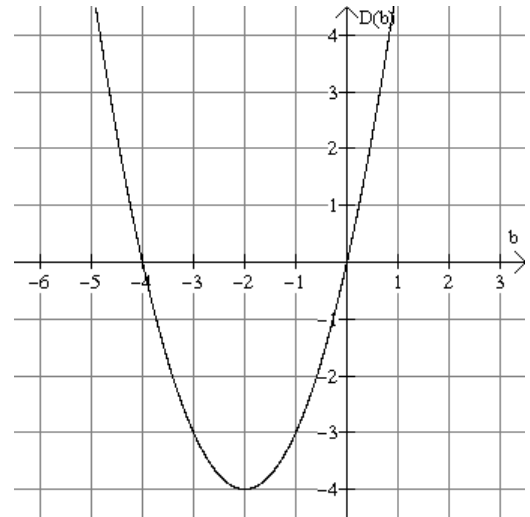
$$\Rightarrow f_4(x) = \frac{-x^2 + 4x - 4}{2 - x} = \frac{-(x-2)^2}{-(x-2)}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}_4(x) = \frac{(x-2)^2}{x-2} = x-2$$

b) $f_4(x) = 0; -x^2 - bx + b = 0$

$$x_{1/2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4b}}{-2}$$

Die Anzahl der Nullstellen hängt von der Diskriminante $D(b)$ ab, deren Graph recht zu sehen ist.



1. Fall: $b < -4$

Zwei einfache Nullstellen

$$x_1 = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4b}}{-2}$$

$$x_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4b}}{-2}$$

2. Fall: $b = -4$

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2} = 2 \notin D_{\max}$$

keine Nullstelle

3. Fall: $-4 < b < 0$

keine Nullstelle

4. Fall: $b = 0$

$$x_{1/2} = 0$$

eine doppelte Nullstelle

5. Fall: $b > 0$

Zwei einfache Nullstellen,
vgl. Fall 1

c) $f_{-1}(x) = g(x)$

$$\frac{-x^2 + x - 1}{2 - x} = -2x + 1$$

$$-x^2 + x - 1 = (-2x + 1)(2 - x)$$

$$-x^2 + x - 1 = -4x + 2x^2 + 2 - x$$

$$3(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$3(x-1)^2 = 0$$

doppelte Lösung bei $x_3 = 1$, also Berührstelle.

d) $f_{-1}(x) = \frac{-x^2 + x - 1}{2 - x}$

Senkrechte Asymptote bei $x = 2$

Schräge Asymptote: $(-x^2 + x - 1) : (-x + 2) = x + 1 - \frac{3}{-x+2}$, d.h. $y = x + 1$.

3.

a) Wegen $c \neq 1$ ist $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{2; 2c\}$
 $x^3 - 2cx^2 + c^2x = x(x^2 - 2cx + c^2) = x(x - c)^2$

1. Fall: $c = 2$

Hebbare Definitionslücke bei $x = 2$

und Polstelle 1. Ordnung (mit Vorzeichenwechsel) bei $x = 4$.

$x_1 = 0$ ist eine (einfache) Nullstelle, $x_2 = 2$ in diesem Fall nicht.

2. Fall: $c \neq 2$

Polstelle 1. Ordnung (mit Vorzeichenwechsel) bei $x = 2$

und Polstelle 1. Ordnung (mit Vorzeichenwechsel) bei $x = 4$.

$x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ sind (jeweils einfache) Nullstellen von $f_c(x)$.

b) $f_2(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{(x-2)(x-4)} = \frac{x(x-2)^2}{(x-2)(x-4)}; \tilde{f}_2(x) = \frac{x(x-2)}{(x-4)}$

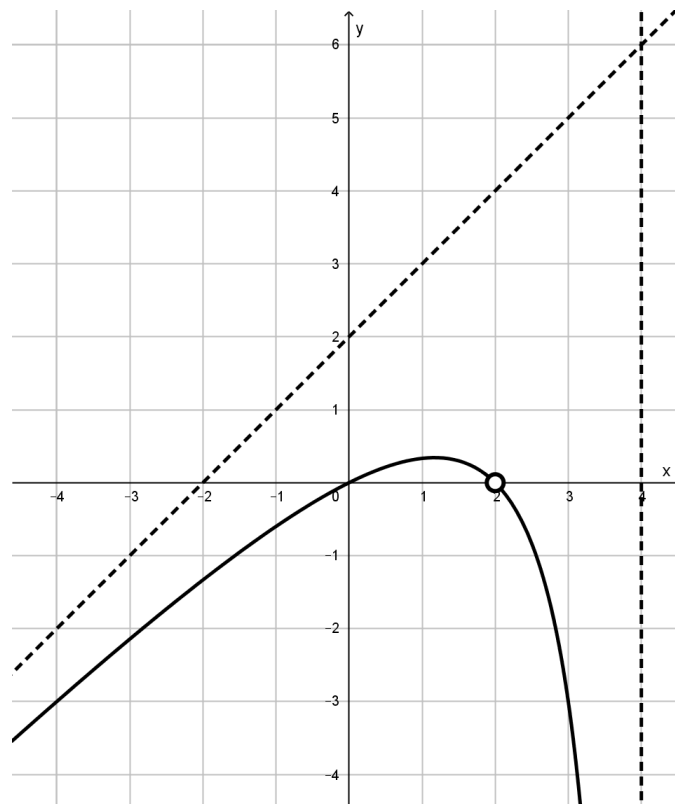
Eine senkrechte Asymptote liegt vor an der Polstelle, also mit der Gleichung $x = 4$.

$$(x^2 - 2x) : (x - 4) = x + 2 + \frac{8}{x-4},$$

die Gleichung der schrägen Asymptote lautet daher $y = x + 2$.

c) $f_2(-4) = -3; f_2(3) = -3;$

bei $x_1 = 0$ befindet sich eine Nullstelle und bei $x_2 = 2$ eine hebbare Definitionslücke.



4. Hinweis: Bei f_d handelt es sich nicht etwa um einen Differentialquotienten, sondern lediglich um eine Funktion mit reellem Parameter d .

a) $z(0) = 2 \Rightarrow$ Polstelle 1. Ordnung bei $x = 0$.

b) $x_{1/2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 8d}}{2d}$

1. Fall: $d < 0$: Zwei einfache Nullstellen

2. Fall: $0 < d < 8$: Keine Nullstellen

3. Fall: $d = 8$ Eine doppelte Nullstelle bei $x_{1/2} = -\frac{1}{2}$

4. Fall: $d > 8$ Zwei einfache Nullstellen

c) Senkrechte Asymptote bei $x = 0$ (Polstelle 1. Ordnung)
Schräge Asymptote mit $y = x + 1$ (Polynomdivision)

d) Die Gleichung $\frac{dx^2 + dx + 2}{dx} = -2x - 5$ ergibt vereinfacht
 $3dx^2 + 6dx + 2 = 0$

Damit die Gerade tatsächlich berührt, muss die Diskriminante $D = (6d)^2 - 4 \cdot 3d \cdot 2$
den Wert Null annehmen: $36d \left(d - \frac{2}{3}\right) = 0$.

Der Wert $d_1 = 0$ ist in der Angabe ausgeschlossen, bleibt als Lösung $d_2 = \frac{2}{3}$.