Kombinatorik
Übung

1. **Variation ohne Wiederholung**

   a) Drei Autos können sich auf 15 Parkplätze verteilen. Auf wie viele Arten ist das möglich?

   b) Im Kino gibt es eine Reihe mit fünf nummerierten Plätzen. Drei Freunde möchten sich dort hinsetzen. In wie vielen möglichen Anordnungen können sie die Plätze belegen?

   c) In einer Gruppe von acht Personen sollen drei auf einem Foto in einer bestimmten Reihenfolge abgebildet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

   d) Aus einer Gruppe von sechs Personen sollen vier in einer bestimmten Reihenfolge ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

   e) Lehrer Huber möchte fünf von zehn verschiedenen Arbeitsblättern an seine Klasse verteilen. Die Blätter sollen in einer festgelegten Reihenfolge bearbeitet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Arbeitsblätter zu verteilen?

   f) Von 18 Mannschaften in der Bundesliga stellt sich die Frage nach dem ersten, zweiten und dritten Platz. Ermitteln Sie die Anzahl der Möglichkeiten.

2. **Variation mit Wiederholung**

   a) Das RGB-Zahlenschema beruht auf einem sechsstelligen Code, der jeweils aus den Ziffern 0 bis 9 oder einem Buchstaben von A bis F besteht. Beispielsweise entspricht der Code #FF0000 für ein reines rot. Wie viele Farbkombinationen können mit diesem Modell insgesamt dargestellt werden?

   b) Ein Bank-PIN besteht aus vier Ziffern von jeweils 0 bis 9. Wie viele mögliche PINs gibt es?

   c) Das Smartphone eines Freundes besitzt ein Passwort mit sechs Stellen, die nur aus den Ziffern von 0 bis 4 besteht. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Kombinationen.

   d) Sie können vier Kugeln aus einer Urne mit sechs verschiedenen Kugeln ziehen. Nach jedem Zug wird die Kugel zurückgelegt. Wie viele mögliche Kombinationen gibt es?

   e) Wie viele vierstellige verschiedene PINs lassen sich aus den Ziffern 2, 3, 4, 5 und 6 bilden? Jede der Ziffern kann auch mehrfach vorkommen.

   f) Ein Tresor besitzt eine Kombination aus drei zweistelligen Zahlen. Wie viele verschiedene Codes gibt es?

   g) In einer Einbahnstraße mit drei leeren Fahrspuren schaltet die Ampel auf Rot. Bis zur nächsten Grünphase kommen nacheinander 14 Autos an dieser Ampel zum Stehen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten können sich die 14 nacheinander eintreffenden Autos auf die drei Fahrspuren aufteilen? Die Fahrer wählen dabei ihre Fahrspur völlig unabhängig voneinander.

3. Zum Thema Passwortsicherheit: Ermitteln Sie jeweils die Anzahl der Möglichkeiten für ein achtstelliges Passwort. Neben den 10 Ziffern existieren jeweils 26 Klein- und Großbuchstaben sowie 32 Sonderzeichen.

   a) Es werden nur Ziffern verwendet.

   b) Erlaubt sind Ziffern und Kleinbuchstaben.

   c) Das achtstellige Passwort besitzt Ziffern und Buchstaben.

   d) Außer Ziffern und Buchstaben werden auch Sonderzeichen verwendet.

4. **Permutation ohne Wiederholung**

   a) Berechnen Sie: 4!, 9! und 20!

   b) In einer Warteschlange stehen sechs Personen. In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen können sie stehen?

   c) In einem Regal stehen acht verschiedene Videospiele. Auf wie viele verschiedene Reihenfolgen können die Spiele nebeneinander angeordnet werden?

   d) Zwölf Autos sollen auf zwölf Parkplätze verteilt werden. Geben Sie die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten an.

   e) Ein Auto besitzt inklusive Fahrerplatz fünf Sitze. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, das Auto voll zu besetzen, wenn jeder der Insassen das Auto fahren könnte. Wie ändert sich das Ergebnis, wenn zwei Erwachsene mit Führerschein und drei Kinder im Auto sitzen? Inwiefern ändert sich das Ergebnis, wenn die beiden Erwachsenen vorne sitzen müssten?

   f) Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es für die Buchstaben des Wortes „ABCD"?

   g) Geben Sie die Anzahl der Möglichkeiten an, die sieben Bände von Harry Potter in einem Bücherregal anzuordnen.

   h) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben des Wortes „Mathe" zu permutieren?

   i) In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen können die Ziffern 1, 2 und 3 aufgeschrieben werden? Geben Sie alle Möglichkeiten an.

   j) Die Klasse FW11b mit 24 Schülern und ebenso vielen Sitzplätzen möchte alle möglichen Sitzordnungen durchprobieren. Berechnen Sie, wie lange sie dafür brauchen würde, wenn jede Möglichkeit eine Sekunde dauern würde.

5. **Permutationen mit Wiederholung**

   a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben des Worts „MATHEMATIK" zu permutieren?

   b) Sie ziehen aus einer Urne zwei rote, vier blaue und drei schwarze Kugeln. Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es?

   c) Es werden drei gelbe, zwei grüne, zwei schwarze und eine rote Kugel aus einer Kiste gezogen. Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es?

   d) Wie viele Permutationen gibt es für das Wort „BANANE"?

6. Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten.

   a) $\binom{7}{3}$ b) $\binom{3}{2}$ c) $\binom{12}{4}$

   d) $\binom{9}{5}$ e) $\binom{22}{13}$ f) $\binom{15}{8}$

   g) $\binom{3}{1}$ h) $\binom{9}{7}$ i) $\binom{11}{11}$

7. Berechnen Sie den Wert von $\binom{5}{3}$. Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis durch Angabe aller Möglichkeiten.

8. Zeigen Sie: Für $n, k \in \mathbb{N}$ und $n \geq k$ gilt

   a) $\binom{n}{1} = n$

   b) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ und $\binom{100}{51} = \binom{100}{49}$

9. **Kombination ohne Wiederholung**

   a) Es sollen neun Parklücken von drei gleichen roten und sechs gleichen schwarzen Autos belegt werden. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten.

   b) Von 20 Sprintern sollen die drei schnellsten ermittelt werden. Wie viele mögliche Ergebnisse kann es geben?

   c) Aus 100 Kandidaten einer Fernsehshow sollen die sieben besten in die Endrunde kommen. Berechnen Sie die Anzahl der Zusammenstellungen.

   d) Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten bei der Lottovariante „6 aus 49“.

   e) Vier der 18 Bundesligavereine kommen in die Champions League. Wie viele Möglichkeiten für Champions League-Teilnehmer gibt es dann?

f) Für das Elfmeterschießen muss der Trainer fünf der elf Spieler auf dem Platz auswählen. Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, wenn die Reihenfolge der fünf Spieler egal ist.

g) Auf wie viele Arten kann man sechs Hotelgäste in zehn freie Einzelzimmer unterbringen?

h) In der Bundesliga spielen 18 Vereine. Wie viele Spiele finden dann in jeder Saison statt, wenn jede Mannschaft gegen jede andere spielt? Beachten Sie, dass es Hin- und Rückspiel gibt, also je zwei Mannschaften zweimal gegeneinander spielen.

i) Es gibt fünf verschiedene Farben an Gummibärchen. Ein Schüler sucht sich vier verschiedene davon aus. Wie viele mögliche Farbkombinationen gibt es?

j) Ein bayerisches Kartendeck besteht aus 36 Karten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einem solchen Deck genau fünf Karten auszuwählen?

k) Wie viele verschiedene Wörter können aus den vier Buchstaben des Wortes „OTTO" gebildet werden? Geben Sie alle Möglichkeiten explizit an.

10. **Kombination mit Wiederholung**

a) Ein Florist hat 4 verschiedene Blumenarten zur Verfügung. Ein Kunde möchte einen Strauß mit 6 Blumen. Wie viele verschiedene Sträuße sind möglich?

b) Sie möchten einen Obstkorb mit acht Früchten füllen. Es stehen drei verschiedene Obstsorten zur Auswahl, und jede Sorte darf beliebig oft gewählt werden.
Auf wie viele Arten können Sie den Obstkorb füllen?

c) Aus einer Urne mit zehn verschiedenen Kugeln wird dreimal mit Zurücklegen gezogen. Wie viele möglichen Kugelkombinationen existieren?

d) Sie kaufen sich ein Eis mit zwei Kugeln und können dabei aus den Sorten Erdbeere (E), Schoko (S), Vanille (V) und Waldmeister (W) auswählen. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Kombinationen und geben Sie diese alle konkret an.

11. Vermischte und anspruchsvollere Aufgaben

a) Ein Restaurant bietet vier Vorspeisen, fünf Hauptgerichte und drei Desserts an. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein dreigängiges Menü zu servieren?

b) In einer Klasse werden Klassensprecher gewählt. Die Klasse besteht aus 15 Jungs und 13 Mädchen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei Klassensprecher zu wählen? Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn ein Mädchen und ein Junge gewählt werden sollen? Wer von den beiden erster bzw. zweiter Klassensprecher werden soll, ist dabei unerheblich.

c) Aus einer Gruppe von zehn Schülern sollen vier für ein Team ausgewählt werden. Allerdings dürfen Paul und Elias nicht in diesem Team sein. Wie viele Teamkonstellationen gibt es?

d) Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten werden fünf Karten gezogen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, genau drei der vier vorhandenen Ober zu ziehen?

e) Drei Schülerinnen und sechs Schüler stellen sich in einer Reihe für ein Foto auf. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für die Aufstellung, wenn die drei Mädchen nebeneinanderstehen sollen.

f) In einem Parkhaus befinden sich insgesamt 100 Parkplätze. 18 davon sind frei und vier Autofahrer suchen jeweils einen Parkplatz. Formulieren Sie in diesem Zusammenhang jeweils einen Kontext zu folgenden Termen.

$$18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \text{ bzw. } \binom{18}{4}$$

g) Eine Gruppe von zwölf Schülern soll in vier gleich große Gruppen eingeteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

h) Ein Café bietet sieben verschiedene Kaffeegetränke an. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn Sie und Ihre zwei Freunde jeweils unterschiedliche Getränke bestellen? Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn diese Einschränkung nicht gilt?

i) Ein Team einer Basketballmannschaft besteht aus insgesamt zwölf Spielern. Zu Beginn des Spiels müssen fünf Startspieler bestimmt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Startspieler zu wählen? Zur Halbzeit sollen vier der Startspieler eingetauscht werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die neue Mannschaft in der zweiten Halbzeit?

j) Ein Passwort besteht aus drei Kleinbuchstaben und zwei Zahlen. Wie viele verschiedene Passwörter gibt es?

k) In einem Team befinden sich zehn Mitglieder. In wie vielen unterschiedlichen Reihenfolgen können fünf davon aufgestellt werden?

l) Man zieht zweimal aus einem bayerischen Deck mit 36 Karten. Geben Sie die Anzahl der Möglichkeiten an, aus diesem Kartendeck zwei der insgesamt vier 9er zu ziehen.

Kombinatorik
Lösung

1.

a) $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2\,730$ Arten (Variation ohne Wiederholung)
b) $\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
c) $\frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$
d) $\frac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
e) $\frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$
f) $\frac{18!}{15!} = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4\,896$

2.

a) Es existieren $16^6 = 17\,666\,216$ Farbkombinationen. Es handelt sich hier um eine Variation mit Wiederholung.
b) $10^4 = 10\,000$
c) $5^6 = 15\,625$
d) $6^4 = 1\,296$
e) $5^4 = 625$
f) Es gibt jeweils 100 zweistellige Zahlen von 00 bis 99, folglich $100^3 = 1\,000\,000$
g) $3^{14} = 4\,782\,969$

3.

a) $10^8 = 100\,000\,000$
b) $36^8 = 2\,821\,109\,907\,456$
c) $62^8 = 218\,340\,105\,584\,896$
d) $94^8 = 6\,093\,689\,385\,410\,816$

4.

a) $4! = 24$
$9! = 362\,880$
$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$
b) $6! = 720$
c) $8! = 40\,320$
d) $12! = 479\,001\,600$
e) $5! = 120$,
bei nur zwei möglichen Fahrern reduziert sich die Anzahl auf $2 \cdot 4! = 48$.
Sitzen die beide Erwachsenen vorne, dann gibt es $2! \cdot 3! = 12$ Möglichkeiten.
f) $4! = 24$
g) $7! = 5\,040$
h) $5! = 120$
i) $3! = 6$, diese Möglichkeiten sind 123; 132; 213; 231; 312 und 321.
j) $24! = 620\,448\,401\,733\,239\,439\,360\,000$, dieser Anzahl an Sekunden entsprechen ca. 19 674 289 755 620 226 Jahre.

5.

a) $\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 453\,600$, die Faktoren im Nenner stehen für die zwei „T“s, „A“s und „M“s.
b) $\frac{9!}{2! \cdot 4! \cdot 3!} = 1\,260$

Weitere Möglichkeiten zur Berechnung wären zum Beispiel $\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = 1\,260$ oder $\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{3} = 1\,260$.

c) $\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} = 1\,680$ bzw. $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = 1\,680$

d) $\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$, die Ausdrücke im Nenner kommen wegen der zwei “N” und der zwei “A”s zustande.

6. Hinweis: Es ist festgelegt $0! = 1$

a) $\binom{7}{3} = 35$ b) $\binom{3}{2} = 3$ c) $\binom{12}{4} = 495$

d) $\binom{9}{5} = 126$ e) $\binom{22}{13} = 497\,420$ f) $\binom{15}{8} = 6\,435$

g) $\binom{3}{1} = 3$ h) $\binom{9}{7} = 36$ i) $\binom{11}{11} = 1$

7. $\binom{5}{3} = 10$. Dies entspricht z.B. der Anzahl der Möglichkeiten, genau drei von fünf Quadraten in einer Reihe zu markieren. Diese Möglichkeiten sind konkret:

■■■□□	■□□■■
■■□■□	□■■■□
■■□□■	□■■□■
■□■■□	□■□■■
■□■□■	□□■■■

8.

a) $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 1} = \frac{n}{1} = n$

b) $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-n+k)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k)!(n-k)!} = \binom{n}{k}$,
die zweite Formel ist eine direkte Folgerung daraus mit $n = 100$ und $k = 49$.

9.

a) $\binom{9}{3} = \binom{9}{6} = 84$

b) $\binom{20}{3} = 1\,140$

c) $\binom{100}{7} = 16\,007\,560\,800$

d) $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$, sollte man den Jackpot mit Superzahl knacken wollen, dann erhöht sich dieser Wert nochmal um den Faktor 10.

e) $\binom{18}{4} = 3\,060$

f) $\binom{11}{5} = 462$

g) $\binom{10}{6} = 210$

h) $2 \cdot \binom{18}{2} = 2 \cdot 153 = 306$

i) $\binom{5}{4} = 5$

j) $\binom{36}{5} = 376\,992$

k) $\binom{4}{2} = 6$, und zwar OOTT, OTOT, OTTO, TOOT, TOTO und TTOO.

Diese Aufgabe ist auch als Permutation mit Wiederholung durch $\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$ zu lösen.

10.

a) $\binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$

b) $\binom{3+8-1}{8} = \binom{10}{8} = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 45$

c) $\binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1} = 220$

d) $\binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2!} = 10.$

Diese zehn Möglichkeiten sind konkret EE, ES, EV, EW, SS, SV, SW, VV, VW und WW.

11.

a) Es gibt $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten, das ergibt sich aus dem sogenannten allgemeinen Zählprinzip.

b) $\binom{28}{2} = 378$

bzw. $15 \cdot 13 = 195$, falls ein Junge und ein Mädchen darunter sein soll.

c) $\binom{10}{4} - \binom{8}{2} = 210 - 28 = 182$

d) $\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{2} = 4 \cdot 378 = 1\,512$, es müssen drei Ober aus den vier vorhandenen und zwei Karten aus den restlichen 28 gezogen werden.

e) Es existieren $7 \cdot 3! \cdot 6! = 30\,240$ Möglichkeiten, die Faktoren stehen für die Position der Mädchengruppe (7 Möglichkeiten), die 3! für die Tauschmöglichkeiten der drei Mädchen innerhalb dieser Gruppe und die 6! für die Möglichkeiten der Männer.

f) Der erste Ausdruck entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, die 18 freien Parkplätze mit den vier Autos zu besetzen, wenn die Reihenfolge entscheidend ist. Der Binomialkoeffizient $\binom{18}{4}$ beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten, die 18 freien Parkplätze mit den vier Autos zu besetzen, wenn die Reihenfolge nicht wichtig ist.

g) $\frac{12!}{(3!)^4\cdot 4!} = 15\,408$

h) Unterschiedlich: $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ (Variation ohne Wiederholung)
Auch gleiche Getränke: $7^3 = 343$ (Variation mit Wiederholung)

i) $\binom{12}{5} = 792$, nach der Halbzeit gibt es $\binom{5}{4} \cdot \binom{7}{4} = 175$ neue Mannschaftskonstellationen.

j) Es existieren $\binom{5}{3} = 10$ Möglichkeiten, die drei Buchstaben auf die fünf Stellen zu verteilen. Daher sind es $10 \cdot 26^3 \cdot 10^2 = 17\,576\,000$ verschiedene Passwörter.

k) $5! = 120$, die zehn Mannschaftsmitglieder sind hier unerheblich.

l) $\binom{4}{2} = 6$