Lagebeziehung Parabel - Parabel
Übung

1. Ermitteln Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte zwischen den Funktionen f_1 und f_2. Geben Sie gegebenenfalls jeweils die Lage und die Art dieser Punkte (Schnitt- oder Berührpunkt) mit an. •∘∘

   a) $f_1(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 1)$ und $f_2(x) = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 1$

   b) $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ und $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

   c) $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ und $f_2(x) = -x^2 + 6x - 5$

   d) $f_1(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$ und $f_2(x) = \frac{1}{3}x^2 + x - 2$

   e) $f_1(x) = -\frac{1}{3}(x-1)(x-5)$ und $f_2(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + \frac{4}{3}$

   f) $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$ und $f_2(x) = -(x^2 + 4x + 1)$

2. Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte von $f(x) = -x^2 + 4x$ und $g(x) = \frac{1}{3}(x-4)^2$. (6 BE) •∘∘

3. Bestimmen Sie die Terme zweier beliebiger quadratischer Funktionen, deren Graphen sich nur im Punkt $P(1; 4)$ schneiden. ••∘

4. Betrachtet wird die folgende Rechnung. ••∘

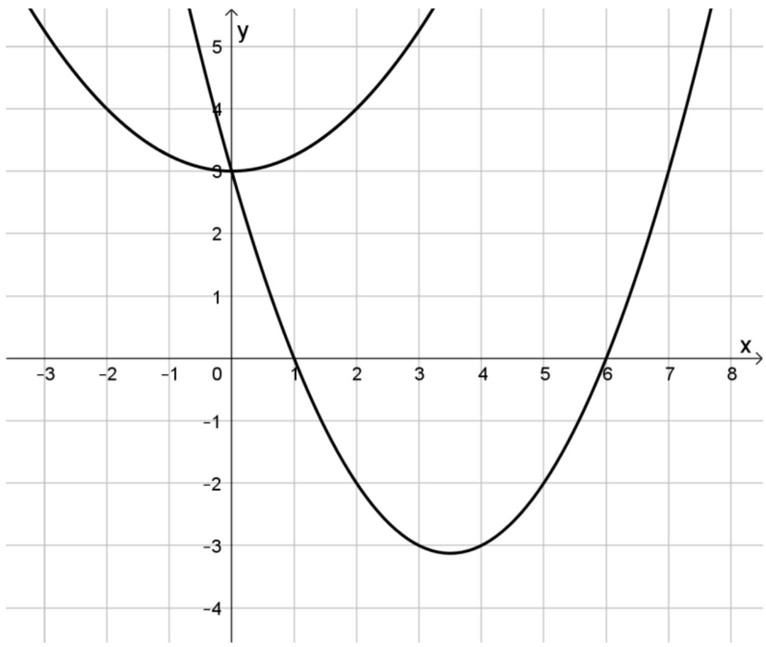
$$x^2 - 2x + 4 = -\frac{1}{2}x^2 + x$$
$$\frac{3}{2}x^2 - 3x + 4 = 0$$
$$3x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = -60$$

   a) Erläutern Sie die Rechnung und interpretieren Sie ihr Ergebnis.

   b) Ändern Sie die oberste Zeile der Rechnung derart, dass sich zwei Lösungen ergeben.

5. Welche Voraussetzungen müssen gelten, damit zwei Parabeln genau einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen? (2 BE) •••

6. Die beiden abgebildeten Graphen schneiden sich im Punkt $S_1(0; 3)$. Berechnen Sie die Koordinaten des weiteren Schnittpunkts. •••



7. Gegeben sind die Parabelgleichungen $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$ und $g(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 7$. ••∘

   a) Geben Sie die Koordinaten der Scheitelpunkte beider Parabeln an.

   b) Zeigen Sie, dass sich beide Parabeln in ihren Scheitelpunkten schneiden.

8. Begründen Sie mit Hilfe einer Zeichnung, dass sich die Graphen von $f(x) = (x-1)^2 + 2$ und $g(x) = -2(x-1)^2 + 2$ in einem Punkt berühren. Geben sie die Koordinaten des Berührpunkts an. ••∘

9. Die Parabeln mit den Gleichungen $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 3x + 8$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ berühren sich im Punkt $B(-3; 2)$. Begründen Sie, dass die Rechnung $f(-3) = g(-3) = 2$ nicht genügt, um dies zu belegen. ••∘

10. Bestimmen Sie den Wert $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Graphen von $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ und $g_a(x) = ax^2 - 8x + 18$ sich in einem Punkt berühren. (4 BE) •••

11. Bestimmen Sie den Term einer quadratischen Funktion $f_2(x)$, deren Graph den Graphen der Normalparabel $f_1(x) = x^2$ an der Stelle $x_1 = 2$ berührt. •••

Lagebeziehung Parabel - Parabel
Lösung

1.
   a) $S_1(1; 0)$, $S_2(3; 1)$ zwei Schnittpunkte.
   b) Es ergibt sich ein Widerspruch, also kein gemeinsamer Punkt.
   c) $B(2; 3)$ ist der Berührpunkt!
   d) $S(-3; -2)$ Schnittpunkt.
   e) Die Parabeln sind identisch.
   f) kein gemeinsamer Punkt, weil das Gleichsetzen eine Determinante kleiner als Null ergibt.

2. Gleichsetzen der Funktionsterm ergibt die Gleichung $-x^2 + 4x = \frac{1}{3}(x-4)^2$ bzw. $-\frac{4}{3}(x^2 - 5x + 4) = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$.
   Die beiden Schnittpunkte sind deshalb $S_1(1; 3)$, $S_2(4; 0)$.

3. Für diese Aufgabe existieren beliebig viele Lösungen. Damit nur ein Schnittpunkt existiert, müssen beide Funktionen denselben Formfaktor a besitzen, z.B. $a = 1$. Nun muss nur noch sichergestellt werden, dass $P(1; 4)$ enthalten ist. Beispiele sind die beiden Funktionen $f_1(x) = x^2 + 3$ und $f_2(x) = x^2 + x + 2$.

4.
   a) Die gemeinsamen Punkte der Graphen von $f_1(x) = x^2 - 2x + 4$ und $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$ werden berechnet. Da die Diskriminante einen negativen Wert von -60 besitzt, existieren diese nicht.
   b) Hier existieren unendliche viele Möglichkeiten. Die linke Seite könnte beispielsweise Funktion könnte auf $x^2 - 2x$ geändert werden.

5.
   - Die Parabeln besitzen denselben Formfaktor a.
   - Sie sind nicht identisch und ihre Scheitelpunkte liegen nicht direkt untereinander (unterschiedliche b-Werte).

6. Die beiden Funktionsterme lauten $f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3$ und $f_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-6)$.
   Gleichsetzen liefert den bereits sichtbaren Schnittpunkt $S_1(0; 3)$ sowie $S_2(14; 52)$.

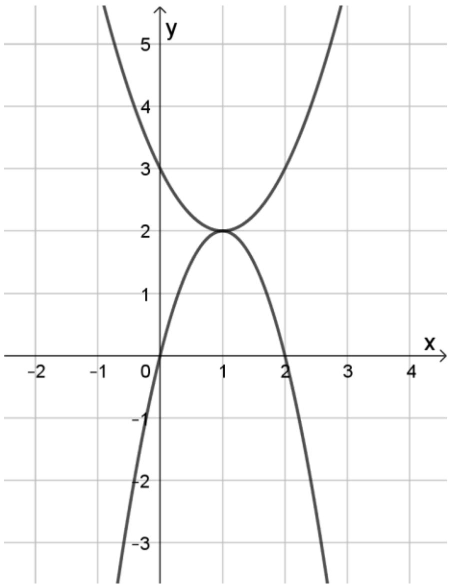
7.
   a) Die Koordinaten der Scheitelpunkte lauten $S_f(-1; -1)$ und $S_g(3; 7)$.

   b) Da die beiden Funktionen ungleichen Formfaktor besitzen, können sie nicht identisch sein. Daher genügt zu zeigen, dass die Scheitelpunkte auf dem jeweils anderem Funktionsgraphen liegen.

$f(3) = \frac{1}{2}(3+1)^2 - 1 = \frac{1}{2} \cdot 16 - 1 = 7$ und
$g(-1) = -\frac{1}{2}(-1-3)^2 + 7 = -\frac{1}{2} \cdot 16 + 7 = -1$

Natürlich können Sie auch die aufwändigere Methode mit dem Gleichsetzen verwenden.

8. Der gemeinsame Scheitelpunkt muss der Berührpunkt $B(1; 2)$ sein.



9. Es genügt nicht zu zeigen, dass beide Graphen durch den Punkt B verlaufen. Der Beweis, dass die Graphen im Berührpunkt dieselbe Steigung besitzen, kann z.B. durch Gleichsetzen erbracht werden. Die Diskriminante der entstehenden Gleichung

$$\frac{5}{6}x^2 + 5x + \frac{15}{2} = 0$$

besitzt dann den Wert $D = 5^2 - 4 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{15}{2} = 0$.
Alternativ kann die gleiche Steigung im Punkt B auch mit Hilfe der Ableitungen durch $f'(-3) = g'(-3) = 1$ gezeigt werden.

10. Setzen Sie die beiden Funktionsterme gleich und berechnen Sie die Diskriminante der entstehenden Gleichung. Diese ist Null, wenn $a = 1$ gilt.

11. Durch Rückwärtsrechnen der Gleichung $(x-2)^2 = 0$ oder sinnvolles Probieren erhält man eine der unendlich vielen Lösungen wie z.B. $f_2(x) = 2x^2 - 4x + 4$ oder $f_2(x) = -(x-4)^2 + 8$.