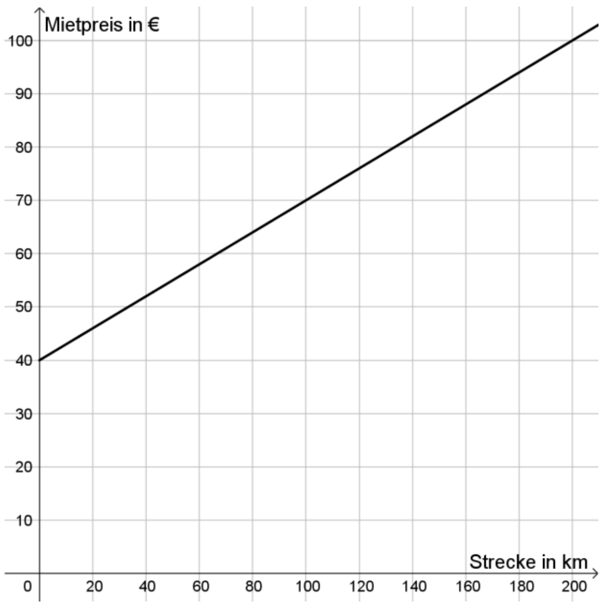
Lineare Funktionen • Anwendungen
Übung

1. Ein 80 cm tiefes, zylinderförmiges Fass wird abgelassen, wobei der Wasserspiegel um 3 cm pro Minute sinkt. Geben Sie die Wasserhöhe w als Funktion der Zeit t an und berechnen Sie hiermit die Dauer, bis das Fass leer ist. •◦◦

2. Die nachfolgende Gerade zeigt die Abhängigkeit des Mietpreises M eines Leihwagens in Abhängigkeit von der gefahrenen Strecke x. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden. Wie hoch ist der Grundpreis, viel kostet zusätzlich ein gefahrener km? •◦◦



3. Bei der Produktion eines Werbeartikels sind die entstehenden Kosten K von der hergestellten Stückzahl abhängig. Bei der Produktion von $x = 50$ Stück entstehen Kosten von 480 €, bei der Produktion von $x = 200$ Stück entstehen Kosten von 510 €. ••◦

   a) Bestimmen Sie die Kostenfunktion $K(x)$.

   b) Wie hoch sind die Kosten bei einer Produktion von $x = 940$ Stück? Wie verhält es sich mit den Stückkosten, d.h. den Kosten pro Produziertem Artikel?

   c) Welchen Wert streben die Stückkosten bei sehr hohen Stückzahlen an?

   d) Die Gewinnschwelle ist der Punkt, an dem die Erlöse und die Kosten gleich sind. Bei welcher Menge x liegt diese, wenn ein Verkaufspreis von 2,70 € pro Werbeartikel erzielt wird?

   e) Zeichnen Sie die Graphen der Kostenfunktion $K(x)$ und der Erlösfunktion $E(x)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem im Bereich $0 \leq x \leq 300$.

4. Die Stadtwerke Kelheim bieten für ihre Kunden einen Stromtarif an, der einen Arbeitspreis von 25 Cent pro Kilowattstunde und einen Grundpreis von 10,00 € pro Monat umfasst. ••◦

   a) Stellen Sie den Funktionsterm für die Gesamtkosten G(x) in Abhängigkeit vom Stromverbrauch x (in kWh) ohne Einheiten dar. Berechnen Sie die Kosten, wenn in einem Monat der Stromverbrauch 390 kWh betragen hat.

   b) Skizzieren Sie den zugehörigen Graphen für einen Verbrauch von bis zu 700 kWh.

   c) Familie Friedrich erhält eine Stromrechnung von 68,25 €. Berechnen Sie mit Hilfe der Funktionsgleichung ihren Verbrauch für diesen Monat.

   d) Eine befreundete Familie besitzt einen Vertrag mit anderen Konditionen. Sie erzählt, dass sie in den vergangenen Monaten bei einem Verbrauch von 320 kWh einen Betrag von 102 € und 126 € bei einem Verbrauch von 400 kWh zu zahlen hatten. Wie hoch sind bei diesem Tarif Arbeits- und Grundpreis?

5. Ein Fallschirmspringer misst nach dem Öffnen seines Fallschirms mit Hilfe eines Höhenmeters zu verschiedenen Zeitpunkten seine Höhe über dem Erdboden. Die Messung ergab die folgende Werte: ••◦

Fallzeit t in s	10	15	20	25	30
Höhe h in m	731	714	697	680	663

   a) Begründen Sie, dass der Zusammenhang zwischen der Zeit und der Höhe durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann. Geben Sie die Funktionsgleichung h(t) dieser Funktion an.

   b) Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Fallschirmspringer den Boden erreicht.

   c) Nach seiner Landung gibt der Fallschirmspringer an, dass er sich bereits nach einer Falldauer von drei Minuten in einer Höhe von weniger als 100 m befunden hatte. Hat er recht?

6. Zwischen der US-Amerikanischen Temperatureinheit Fahrenheit (°F) und der europäischen Celsius-Skala (°C) besteht ein linearer Zusammenhang. Während der Gefrierpunkt (0 °C) 32 °F entspricht, wird bei 20 °C Raumtemperatur 68 °F gemessen.

   a) Ermitteln Sie eine Zuordnungsvorschrift, die der Temperatur in °F den entsprechenden Celsius-Wert zuordnet.

   b) In Florida wurde als Höchsttemperatur 99 °F gemessen. Geben Sie den zugehörigen Wert in Celsius auf eine Nachkommastelle genau an.

   c) In Deutschland werden in kalten Wintern zeitweise −20 °C gemessen. Berechnen Sie den entsprechenden Temperaturwert in Fahrenheit.

Lineare Funktionen • Anwendungen
Lösung

1. $w(t) = 80 - 3t$
   $80 - 3t = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{80}{3}$
   Es dauert 26 Minuten und 40 Sekunden, bis das Fass ganz leer ist.

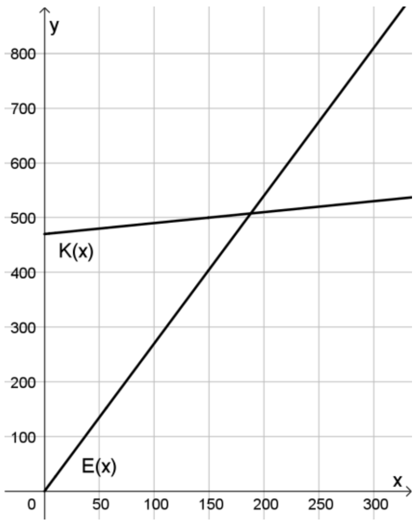
2. $M(x) = 0{,}30x + 40.$
   Der Grundpreis beträgt 40 €, ein gefahrener km kostet 0,30 €.

3.
   a) $K(x) = m \cdot x + t$
      $m = \frac{510-480}{200-50} = 0{,}20$
      Aus $K(50) = 480$ folgt $t = 470.$
      Damit ist $K(x) = 0{,}20x + 470.$

   b) $K(940) = 0{,}20 \cdot 940 + 470 = 658$
      Stückkosten: $\frac{658}{940} = 0{,}70$ (€)

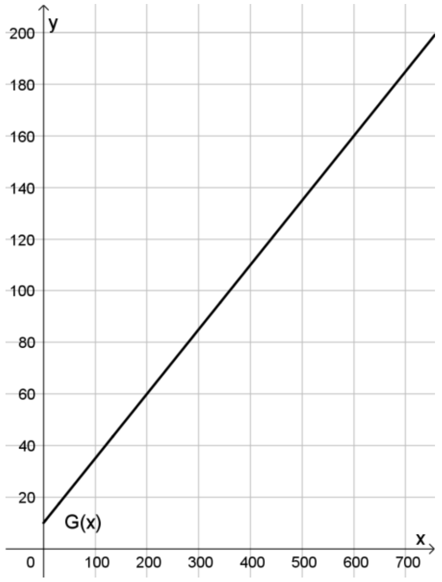
   c) Stückkosten $\frac{K(x)}{x} = \frac{0{,}20x+470}{x} = 0{,}20 + \frac{470}{x}$
      Der Wert nähert sich für große Stückzahlen x dem Preis von 0,20 € an, da sich die Fixkosten von 470 € auf immer mehr produzierte Artikel verteilen.

   d) Die Erlösfunktion lautet $E(x) = 2{,}70 \cdot x.$
      Die Gleichung $K(x) = E(x)$ hat die Lösung $x = 188.$
      Die Gewinnschwelle liegt bei 188 produzierten Artikeln.

   e)


4.
   a) $G(x) = 0{,}25x + 10$
      $G(390) = 107{,}50$ (€)

b)



c) $0{,}25x + 10 = 68{,}25$; $x = 233$.
Sie haben in diesem Monat 233 kWh verbraucht.

d) $G_2(x) = mx + t$
Arbeitspreis: $m = \frac{126-102}{400-320} = 0{,}30$ (€)
Grundpreis: z.B. erstes Wertepaar einsetzen:
$0{,}30 \cdot 102 + t = 320$
$t = 6$, der Grundpreis beträgt 6 €.

5.

a) Es liegt eine lineare Funktion vor, da er in gleichen Zeitabschnitten (5s) gleiche Höhen durchfällt, jeweils 17 m.
$h(t) = v_0 \cdot t + h_0$
$v_0 = -\frac{17}{5} = -3{,}4$
$h_0 = 731 + 10 \cdot 3{,}4 = 765$
$h(t) = -3{,}4 \cdot t + 765$

b) $h(t) = 0$; $t_0 = 225(s)$
Er erreicht den Boden nach 3 min 45s.

c) $h(180) = -3{,}4 \cdot 180 + 765 = 153$, seine Behauptung stimmt nicht.

6.

a) $C: F \mapsto \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$

b) $C(99\,°F) \approx 37{,}2\,°C$

c) $\frac{5}{9}F - \frac{160}{9} = -20 \Rightarrow F = -4\,°F$