Lineare Unabhängigkeit von Vektoren
Übung

1. Überprüfen Sie auf lineare Unabhängigkeit:

a) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Begründen Sie ohne Rechnung, dass folgende Vektoren linear abhängig sind:

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

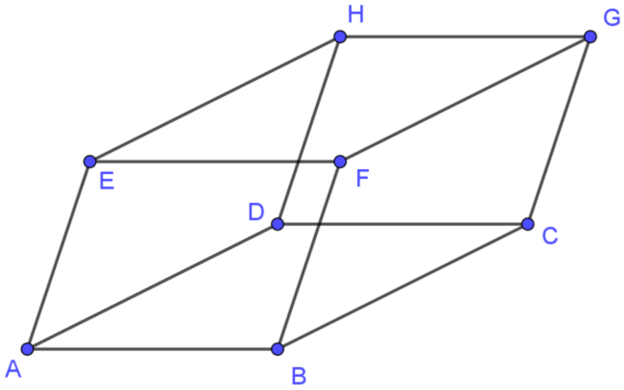
   b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

   c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Prüfen Sie, für welchen Wert von $k \in \mathbb{R}$ die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ t+4 \\ t-2 \end{pmatrix}$ und

   $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

4. Betrachtet wird im $\mathbb{R}^3$ der Spat ABCDEFGH, vergleiche Skizze.



Überprüfen Sie auf lineare Unabhängigkeit.

a) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{EF}$

b) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{EG}$

d) $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EH}$ und $\overrightarrow{HB}$

5. Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Wenn ein Vektor in einer Menge von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden kann, sind diese Vektoren stets linear abhängig.

b) Eine Menge von zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ kann niemals linear unabhängig sein.

c) Im $\mathbb{R}^3$ sind vier Vektoren immer linear abhängig.

d) Wenn zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ nicht kollinear sind, sind sie immer linear unabhängig.

e) Kann mit drei Vektoren eine geschlossene Vektorkette gebildet werden, dann sind sie linear abhängig.

f) Die Gleichung $r_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + r_2 \cdot \overrightarrow{a_2} = \vec{0}$ ist immer lösbar.

g) Ist $\vec{a}$ zu $\vec{b}$ linear unabhängig, ebenso wie $\vec{b}$ zu $\vec{c}$ und $\vec{a}$ zu $\vec{c}$, dann sind auch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig.

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren
Lösung

1.

a) Das Gleichungssystem $r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{0}$ besitzt unendlich viele Lösungen, weil alle Zeilen Vielfache voneinander sind. Beide Vektoren sind deswegen linear abhängig.

b) Das Gleichungssystem besitzt nur die Lösung $r_1 = r_2 = 0$, daher linear unabhängig

Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie Vielfache sind. Sie liegen dann auf einer Geraden und heißen **kollinear**.

a) Es existieren unendlich viele Lösungen wie $\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 - \vec{a}_3 = \vec{0}$, also linear abhängig.

b) Linear unabhängig.

Drei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie **komplanar** sind, d.h. in einer Ebene liegen.

2.

a) Wegen $\vec{b} = -3 \cdot \vec{a}$ sind beide Vektoren Vielfache, also sind sie linear abhängig.

b) Wegen $\vec{c} = -2 \cdot \vec{b}$ sind $\vec{b}$ und $\vec{c}$ kollinear. Daher sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar und daher linear abhängig.

a) Vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind stets linear abhängig.

3. Die Vektoren sind linear abhängig für $t = -2$, weil das entsprechende Gleichungssystem für diesen Wert unendlich viele Lösungen besitzt.

4.

a) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{EF}$ sind linear abhängig, weil sie auf einer Geraden liegen. Dies erkennt man leicht, wenn man $\overrightarrow{EF}$ am Fuß bis zu Punkt A schiebt.

b) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ sind linear unabhängig, weil sie nicht kollinear sind.

c) Die drei Vektoren sind linear abhängig, da sie in einer Ebene liegen.

d) Linear unabhängig.

5.

e) f, die Darstellung muss eindeutig sein.

f) f, die beiden Vektoren dürfen nur nicht kollinear sein.

g) w, das entsprechende Gleichungssystem ist unterbestimmt und besitzt deswegen immer unendlich viele Lösungen.

h) w, das entstehende Gleichungssystem besitzt dann nur die triviale Lösung.

i) w, es muss dann neben der trivialen Lösung noch eine weitere geben.

j) w, $r_1 = r_2 = 0$ ist diese Lösung.

k) f, die drei Vektoren können zwar jeweils auf verschiedenen Geraden liegen, aber trotzdem auf einer gemeinsamen Ebene.