Mengen
Übung

1. Zeichnen Sie das Mengendiagramm für:

   a) $A = \{a; b; c; d; e\}$

   b) $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

2. Geben Sie die folgende Menge in aufzählender Form an:

   a) $A = \{x|x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 3\}$

   b) $B = \{x|x$ ist die Menge der Buchstaben im Alphabet von einschließlich $x = d$ bis $x = g\}$

   c) $C = \{x|x \in \mathbb{Z} \wedge -2 < x < 5\}$

   d) $D = \{x|x = 2^n \wedge n \in \mathbb{N}\}$

   e) $E = \{x|x = 2n + 1 \wedge n \in \mathbb{N}\}$

   f) $F = \{x|x = 3n - 4 \wedge n \in \mathbb{N}\}$

   g) $G = \{x|x = 3^n \wedge n \in \mathbb{N}_0\}$

   h) $H = \{x|x = n^2 - 1 \wedge n \in \mathbb{N}\}$

3. Geben Sie die Mengen A, B und C in beschreibender Form an.

   a) $A = \{a; b; c; d; e; f\}$

   b) $B = \{1; 3; 5; 7\}$

   c) $C = \{1; 4; 9; 16\}$

   d) $D = \{0; 2; 4; 6; 8; \ldots\}$

   e) $E = \{3; 9; 27; 81; 243; \ldots\}$

   f) $F = \{6; 12; 18; 24; \ldots\}$

   g) $G = \{1; 4; 7; 10; 13; \ldots\}$

   h) $H = \{2; 5; 10; 17; 26; \ldots\}$

4. Grundsätzliche Fragen zu Mengen:

   a) Wie nennt man die Bestandteile einer Menge?

   b) Was ist eine leere Menge?

   c) Auf welche verschiedenen Arten kann man Mengen darstellen?

   d) Nennen Sie den wesentlichen Unterschied zwischen einer Teilmenge und einer echten Teilmenge.

5. P sei die Menge der Primzahlen. Geben Sie die kleinsten zehn Elemente von P explizit an und entscheiden Sie mit Mengensymbolen, ob die genannten Zahlen jeweils Elemente von P sind.

$$1; 2; 3; 4; 5; 9; 43; 114$$

6. Es ist $M_1 = \{x|x \in P \wedge x < 10\}$, $M_2 = \{2; 3; 5\}$. Dabei ist P ist die Menge aller Primzahlen.

   a) Geben Sie die Menge M_1 in aufzählender Form an.

   b) Schreiben Sie mit Mengensymbolen, ob M_2 Teilmenge von M_1 ist oder nicht.

7. Geben Sie die Menge M in aufzählender Form an und überprüfen Sie, ob die folgenden Aussagen auf wahr (w) oder falsch (f) sind.

$$M = \{x|x \in \mathbb{N} \wedge -5 \leq x < 4\}$$

   a) $3 \in M$ b) $4 \in M$ c) $-2 \notin M$

8. Welche der folgenden Aussagen sind wahr (w) bzw. falsch (f)?

   a) $2 \in \{1; 2; 3\}$ b) $\{7; 9\} \subset \{x|x > 8\}$ c) $\{1; 4\} \subset \{1; 2; 3; 4\}$

9. Geben Sie die folgenden Mengen in beschreibender Form an.

   a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

   b) $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

   c) C ist die Menge der natürlichen Zahlen, die kleiner sind als 10.

   d) D ist die Menge der ganzen Zahlen ohne Null zwischen einschließlich -5 und $+5$.

   e) E ist die Menge der Primzahlen, die kleiner als 20 sind.

10. Gegeben sind die fünf Mengen:

$A = \{3,5,7,12,14,17,19,23\}$
$B = \{3,5,17\}$
$C = \{12,14,17,24\}$
$D = \{5,7,19\}$
$E = \{7,12,19\}$

Beurteilen Sie die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt:

a) $B \subset A$

b) $C \subseteq A$

c) $E \subset A$

d) $B \subset C$

e) $E \subset C$

f) $D \subseteq D$

g) $B \subset B$

11. Die Produktmenge (kartesisches Produkt) $A \times B$ der Mengen A und B ist die Menge aller möglichen geordneten Paare mit der Ordnung $x \in A$ an erster Stelle und $y \in B$ an zweiter Stelle im Wertepaar:

$$A \times B = \{(x; y) | x \in A \land y \in B\}$$

Bilden Sie aus $A = \{3; 4; 5\}$ und $B = \{a; b\}$ die Produktmengen

a) $A \times B$

b) $B \times A$

12. Bestimmen Sie die Elemente der Menge $M = \{(x; y) | x + y \leq 2 \land x, y \in \mathbb{N}_0\}$

13. Betrachtet wird die Menge M aller natürlichen Zahlenpaare, deren Summe den Wert 6 ergibt.

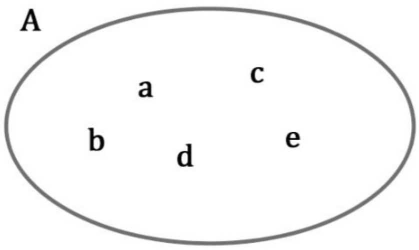
a) Geben Sie M sowohl in aufzählender als auch beschreibender Form an.

b) Die Teilmenge $N \subset M$ enthält ausschließlich ungerade Zahlen. Ermitteln Sie diese.

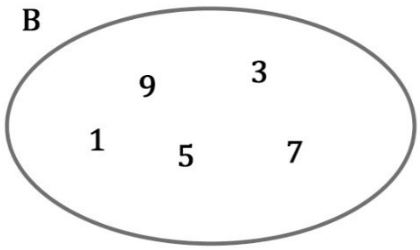
Mengen
Lösung

1.

a)



b)



2.

a) $A = \{1; 2; 3\}$
b) $B = \{d; e; f; g\}$
c) $C = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$
d) $D = \{2; 4; 8; 16; 32\}$, dies ist die Menge der sogenannten **Zweierpotenzen**
e) $E = \{1; 3; 5; 7; 9; \dots\}$
f) $F = \{-1; 2; 5; 8; 11 \dots\}$
g) $G = \{1; 3; 9; 37; 81; \dots\}$
h) $H = \{0; 3; 8; 15; 24; \dots\}$

3.

a) $A = \{$Menge der Buchstaben von a bis f$\}$
b) $B = \{x|x$ ist die Menge der natürlichen ungeraden Zahlen mit $x \leq 7\}$
c) $C = \{x|x$ ist die Menge der Quadratzahlen mit $x \leq 16\}$
d) $D = \{x|x = 2n \wedge n \in \mathbb{N}_0\}$
e) $E = \{x|x = 3^n \wedge n \in \mathbb{N}\}$, die sogenannten Dreierpotenzen
f) $F = \{x|x = 6n \wedge n \in \mathbb{N}\}$, dies sind die Vielfachen von 6.
g) $G = \{x|x = 3n + 1 \wedge n \in \mathbb{N}\}$
h) $H = \{x|x = n^2 + 1 \wedge n \in \mathbb{N}\}$

4.

a) Die Bestandteile einer Menge nennt man **Elemente**.

b) Die **leere Menge** ist eine Menge ohne Elemente.

c) Darstellungsmöglichkeiten sind **aufzählende Form**, **beschreibende Form** sowie **Mengendiagramm**.

d) Eine **Teilmenge** kann identisch zur ursprünglichen Menge sein, die **echte Teilmenge** besitzt mindestens ein Element weniger.

5. $P = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; \dots\}$

$$1 \notin P;\ 2 \in P;\ 3 \in P;\ 4 \notin P;\ 5 \in P; 9 \notin P;\ 43 \in P;\ 114 \notin P$$

6.
a) $M_1 = \{2; 3; 5; 7\}$

b) Ja, M_2 ist eine Teilmenge von M_1, damit ist $M_2 \subset M_1$

7. $M = \{1; 2; 3\}$ [Hinweis: negative Zahlen oder die Null sind keine natürlichen Zahlen]

a) w b) f c) w

8.

a) w b) f c) w

9.
a) z.B. $A = \{x | x \in \mathbb{N}_0 \wedge x \leq 5\}$
b) z.B. $B = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq x \leq 8\}$
c) z.B. $C = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x < 10\}$
d) z.B. $D = \{x | x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \leq x \leq 5 \wedge x \neq 0\}$
e) z.B. $E = \{x | x \in P \wedge x < 20\}$

10.

a) w b) f, weil $24 \notin A$ c) w

d) f e) f f) w

g) f, keine Menge ist echte Teilmenge von sich selbst.

11.
$A \times B = \{(3; a); (3; b); (4; a); (4; b); (5; a); (5; b)\}$
$B \times A = \{(a; 3); (a; 4); (a; 5); (b; 3); (b; 4); (b; 5)\}$

12. $M = \{(0; 0); (0; 1); (0; 2); (1; 0); (1; 1);)(2; 0)\}$

13.
a) $M = \{(1; 5); (2; 4); (3; 3); (4; 2); (5; 1)\}$ bzw.
$M = \{(x; y) | x + y = 6 \wedge x, y \in \mathbb{N}\}$

b) $N = \{(1; 5); (3; 3); (5; 1)\}$