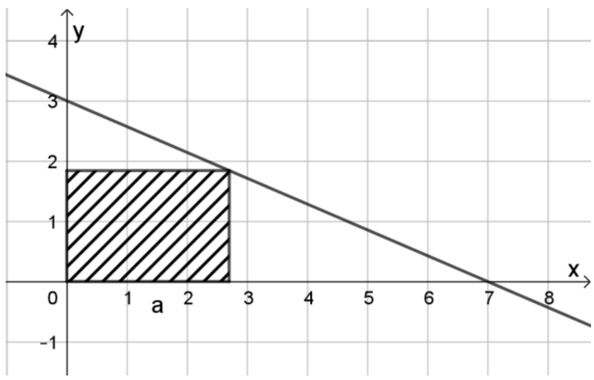
Quadratische Funktionen • Optimierung
Übung

1. Ein Seil mit acht Metern Länge soll zu einem Rechteck gelegt werden. Geben Sie fünf mögliche Zahlenpaare für die Seitenlängen a und b des Rechtecks an sowie den jeweils zugehörigen Flächeninhalt A. Wie sind a und b zu wählen, damit der Inhalt des Rechtecks maximal wird?

2. An einer Mauer soll ein Zaun mit der Länge 160 m zu einem Rechteck mit größtmöglichem Flächeninhalt aufgestellt werden. Berechnen Sie die dazu benötigten Seiten a und b des Rechtecks.

3. Aus einem Draht mit Gesamtlänge 40 cm soll ein Quadergerüst geschweißt werden. Eine Kante des Quaders soll dabei 4 cm lang sein. Wie lang müssen die anderen beiden Kanten sein, damit das Volumen des Quaders möglichst groß wird?

4. Aus einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 3 und 7 soll ein möglichst großes Rechteck ausgeschnitten werden, vgl. untere Skizze. Die Breite des Rechtecks wird mit a bezeichnet.

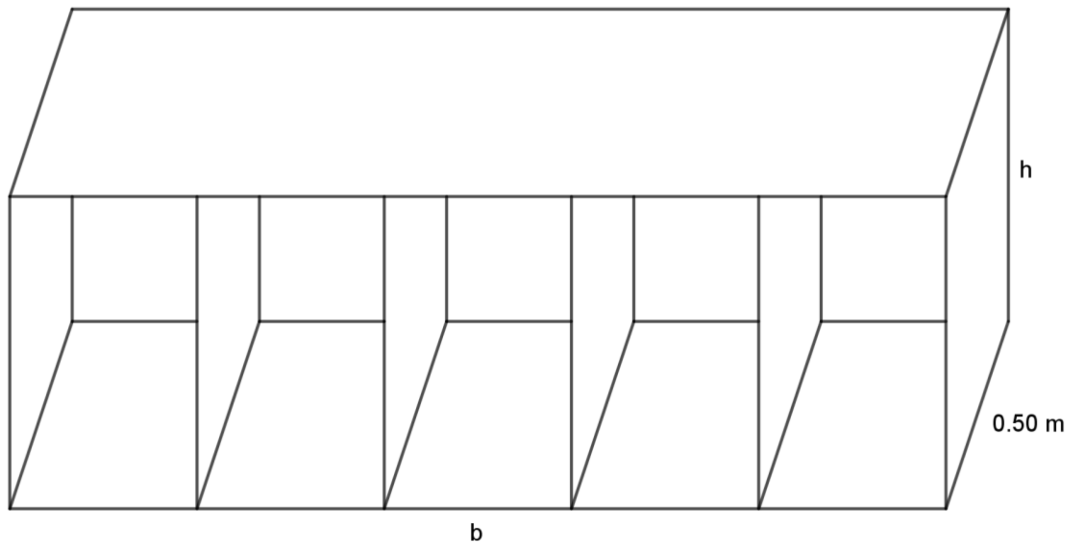


   a) Zeigen Sie, dass das schraffierte Rechteck in Abhängigkeit von der unteres Seite a den Flächeninhalt $A(a) = -\frac{3}{7}a^2 + 3a$ besitzt. Legen Sie einen sinnvollen Definitionsbereich D_A für $A(a)$ fest.

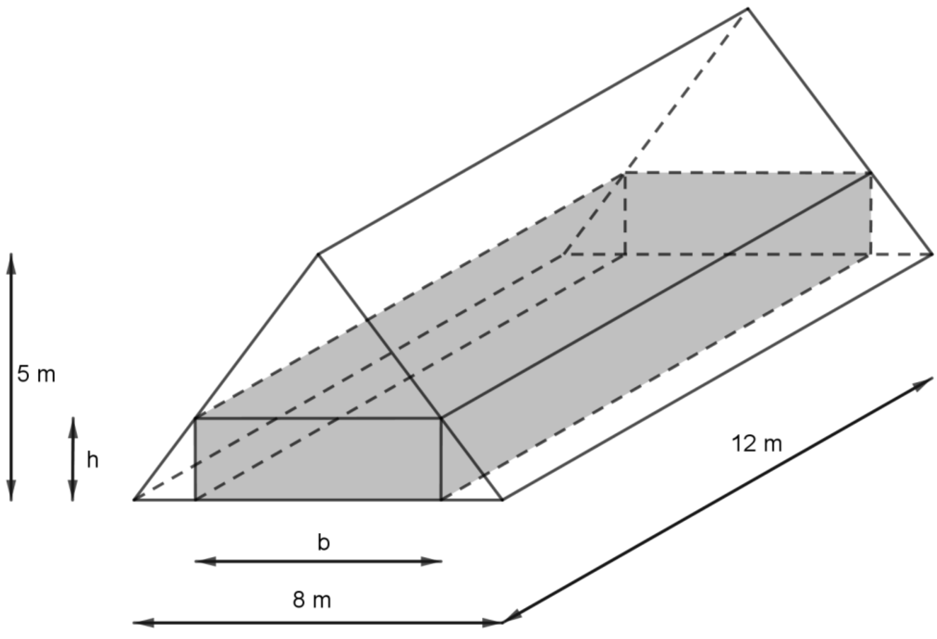
   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks für $a = 1$ und für $a = 5$.

   c) Ermitteln Sie den Wert von a, so dass der Inhalt des Rechtecks maximal wird. Geben Sie diesen maximalen Wert an.

5. Aus einem Brett der Länge 5 m und der Breite 0,50 m soll ein Regal mit fünf Fächern gebaut werden. Wie sind die Breite b und die Höhe h des Regals zu wählen, damit ein möglichst großes Volumen entsteht? Die Dicke des Brettes soll dabei vernachlässigt werden.
[Zwischenergebnis: Das von h abhängige Volumen des Regals beträgt
$V(h) = -1{,}5h^2 + 1{,}25h$]



6. Unter ein Satteldach soll ein Dachboden eingebaut werden. Die Grundfläche des quaderförmigen Hauses ist 8 m breit und 12 m lang, der Querschnitt des Dachs ein gleichschenkliges Dreieck mit einer Höhe von 5 m. Das eingebaute Zimmer mit der Breite b und der Höhe h soll quaderförmig werden (siehe Abbildung). Für alle folgenden Rechnungen wird auf Einheiten verzichtet.



a) Zeigen Sie: Für das Volumen des grau markierten Zimmers gilt in Abhängigkeit von seiner Breite b

$$V(b) = -\frac{15}{2}b^2 + 60b.$$

Bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V für diese Funktion.

b) Berechnen Sie, wie die Breite b und die Höhe h des Zimmers gewählt werden müssen, damit das Volumen des Zimmers möglichst groß wird. Geben Sie für diesen Fall das Volumen des Raumes an.

7. Der Benzinverbrauch eines Autos hängt unter anderem von seiner Geschwindigkeit ab. In einer Untersuchung wird der Benzinverbrauch B eines Autos in Liter pro 100 gefahrene Kilometer gemessen. Die Höchstgeschwindigkeit des Autos beträgt $200\ \frac{km}{h}$. Es werden folgende Werte ermittelt:

v in $\frac{km}{h}$	30	80	130
B in Liter pro 100 km	5,4	5,9	11,4

Es kann davon ausgegangen werden, dass die Abhängigkeit des Benzinverbrauchs von der Geschwindigkeit durch eine quadratische Funktion dargestellt werden kann.

a) Ermitteln Sie den Term des von v abhängigen Benzinverbrauchs B des Autos und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_B der Funktion B an.
[Teilergebnis: $B(v) = 0{,}001v^2 - 0{,}1v + 7{,}5$]

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Geschwindigkeit, bei der der Benzinverbrauch am geringsten ist. Geben Sie diesen an.

c) Berechnen Sie den Benzinverbrauch, wenn das Auto mit einer Geschwindigkeit von $110\ \frac{km}{h}$ fährt. Ermitteln Sie auch, welche Geschwindigkeit zu einem Verbrauch von 20 Litern pro 100 km führt.

Quadratische Funktionen • Optimierung
Lösung

1. Hauptbedingung: $A = a \cdot b$
   Nebenbedingung: $2a + 2b = 8 \Rightarrow b = 4 - a$
   Zielfunktion: $A(a) = -a^2 + 4a$
   Definitionsmenge: $D_A = [0; 4]$
   Lösung: $a = 2$

2. Hauptbedingung: $A = a \cdot b$
   Nebenbedingung: $2a + b = 160 \Rightarrow b = 160 - 2a$
   Zielfunktion: $A(a) = -2a^2 + 160a$
   Definitionsmenge: $D_A = [0; 80]$
   Lösung: $a = 40; b = 80$

3. Hauptbedingung: $V = 4 \cdot a \cdot b$
   Nebenbedingung: $4 \cdot 4 + 4a + 4b = 40 \Rightarrow b = 6 - a$
   Zielfunktion: $V(a) = 4a(6 - a) = -4a^2 + 24a$
   Definitionsmenge: $D_V = [0; 6]$
   Lösung: $a = b = 3$

4.
   a) $f(x) = -\frac{3}{7}x + 3$, $A(a) = a \cdot f(a) = a \cdot \left(-\frac{3}{7}a + 3\right) = -\frac{3}{7}a^2 + 3a$, $D_A = [0; 7]$

   b) $A(1) = \frac{18}{7} \approx 2{,}57$, $A(5) = \frac{30}{7} \approx 4{,}29$

   c) Maximaler Wert für $a_S = 3{,}5$ mit $A_{max} = \frac{21}{4} = 5{,}25$

5. Hauptbedingung: $V = 0{,}5 \cdot b \cdot h$
   Nebenbedingung: $6h + 2b = 5$ (Länge des Bretts) $\Rightarrow b = 2{,}5 - 3h$
   Zielfunktion: $V(h) = 1{,}25h - 1{,}5h^2$
   Definitionsmenge: $D_V = \left[0; \frac{5}{6}\right]$
   Lösung: $h = \frac{5}{12}; b = \frac{5}{4}$ und $V_{max} \approx 0{,}26$

6. Hauptbedingung: $V = b \cdot h \cdot 12$
   Nebenbedingung: $\frac{5-h}{b} = \frac{5}{8}$ (Strahlensatz) $\Rightarrow h = \frac{40-5b}{8}$
   Zielfunktion: $V(b) = -\frac{15}{2}b^2 + 60b$
   Definitionsmenge: $D_V = [0; 8]$
   Lösung: $b = 4; V_{max} = 120$

7.

a) Einsetzen der Zahlenpaare aus der Tabelle in die allgemeine quadratische Gleichung $B(v) = av^2 + bv + c$ ergibt des Gleichungssystem

I) $900a + 30b + c = 5{,}4$

II) $6400a + 80b + c = 5{,}9$

III) $16900a + 130b + c = 11{,}4$

mit der Lösung $a = 0{,}001$; $b = -0{,}1$ und $c = 7{,}5$.

Damit ist $B(v) = 0{,}001v^2 - 0{,}1v + 7{,}5$.

Definitionsmenge ist $D_B =]0; 200]$.

Die Geschwindigkeit $v = 0$ ist nicht sinnvoll und daher ausgeschlossen.

b) Maximalwert am Scheitelpunkt $v_S = -\frac{-0{,}1}{2 \cdot 0{,}001} = 50$

$B(50) = 5\ \frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}$

c) Bei 110 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ liegt der Verbrauch bei 8,6 l/100km,

eine Geschwindigkeit von $v \approx 172\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ führt zu einem Verbrauch von $20\ \frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}$.