Quadratische Gleichungen mit Parameter
Übung

1. Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit vom jeweiligen Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

   a) $x^2 - a = 0$

   b) $x^2 = 4bx$

   c) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + c = 0$

   d) $2x^2 + 4x + d + 1 = 0$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen in Abhängigkeit vom Parameter $k \in \mathbb{R}$.

   a) $kx^2 + 2kx + k = 0; k \neq 0$

   b) $x^2 - k^2 = 0$

   c) $x^2 - 3kx + 2k^2 = 0$

   d) $x^2 + 2x + k = 0$

   e) $\frac{1}{2}kx^2 + 2x + 4 = 0$ mit $k \neq 0$

   f) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}kx - x + k = 0$

3. Gegeben ist die Gleichung $x^2 + 4x + 2c = 0$ mit $c \in \mathbb{R}$.

   a) Geben Sie die Gleichung für $c = -1$ und für $c = 2$ an.

   b) Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung für $c = 0$.

   c) Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$.

   d) Geben Sie die Lösungsmenge für den Fall $c < 2$ an.

4. Zu betrachten ist die Gleichung $x^2 + 2dx - 2x + d = 1$ mit $d \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Werte für d so, dass die Gleichung genau eine Lösung besitzt und geben Sie jeweils diese Lösung an.

5. Ermitteln Sie jeweils die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit vom jeweiligen reellen Parameter. Geben Sie die entsprechenden Lösungen mit an.

   a) $\frac{1}{3}(x-k)(x-2k)=0, k \in \mathbb{R}$

   b) $ax^2-4ax+3a=0; a \neq 0$

   c) $x^2+2x+k=0; k \in \mathbb{R}$

   d) $ax^2=a^2x, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

   e) $2x^2-3tx+t^2=0; t \in \mathbb{R}$

   f) $3x^2+bx+3=0; b \in \mathbb{R}$

   g) $x^2-2dx-6d=-3x; d \in \mathbb{R}$

   h) $mx^2+(m+2)\cdot x+3=3x^2+2; m \in \mathbb{R}$

6. Finden Sie eine quadratische Gleichung, die genau folgende Lösungsmenge besitzt.

   a) $L=\{1; a\}$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

   b) $L=\{b\}$ für $b \in \mathbb{R}$

   c) $L=\{-c; c\}$ für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

7. Berechnen Sie möglichst vorteilhaft die Lösungsmenge der Gleichungen $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

   a) $6(x-a)^2=0$

   b) $(x-2b)^2=9$

   c) $4cx^2+8cx=0; c \neq 0$

   d) $\frac{1}{2}x^2-2dx=-2d^2$

Quadratische Gleichungen mit Parameter
Lösung

1.

a) $x^2 = a$

1. Fall: $a < 0$ keine Lösung
2. Fall: $a = 0$ eine Lösung
3. Fall: $a > 0$ zwei verschiedene Lösungen

Diese Aufgabe kann auch mit Hilfe der Diskriminante gelöst werden, was allerdings etwas aufwändiger wäre.

b) $x(x - 4b) = 0$ besitzt die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4b$.

1. Fall: $b = 0$ eine doppelte Lösung
2. Fall: $b \neq 0$ zwei verschiedene Lösungen

Die Möglichkeit „Keine Lösung" besteht hier nicht. Auch in dieser Aufgabe führt die Rechnung mit der Diskriminante umständlicher zum selben Ergebnis.

c) $D = 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot c = 4 - 2c$

1. Fall: $c < 2$ zwei Lösungen
2. Fall: $c = 2$ eine Lösung
3. Fall: $c > 2$ keine Lösung

d) $D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (d + 1) = 8 - 8d$

1. Fall: $d < 1$ zwei verschiedene Lösungen
2. Fall: $d = 1$ eine Lösung
3. Fall: $d > 1$ keine Lösung

2.

a) Teilen der Gleichung durch $k \neq 0$ führt zu $x^2 + 2x + 1 = 0$ bzw. $(x + 1)^2 = 0$.
Die Gleichung besitzt damit unabhängig von k die Lösungsmenge $L = \{-1\}$.

b) $x_{1/2} = \pm k$

1. Fall: $k = 0$ eine Lösung $L = \{0\}$
2. Fall: $k \neq 0$ zwei verschiedene Lösungen $L = \{-k; k\}$
Es gibt hier immer mindestens eine Lösung.

c) $x_{1/2} = \frac{3k \pm \sqrt{(-3k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2k^2}}{2} = \frac{3k \pm k}{2}$

1. Fall $k = 0$ eine Lösung $L = \{0\}$
2. Fall $k \neq 0$ zwei verschiedene Lösungen $L = \{k;\ 2k\}$

d) $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4k}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-k}$

1. Fall: $k < 1$ zwei verschiedene Lösungen $L = \{-1 \pm \sqrt{1-k}\}$
2. Fall: $k = 1$ eine Lösung $L = \{-1\}$
3. Fall: $k > 1$ keine Lösung $L = \emptyset$

e) $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8k}}{2 \cdot \frac{1}{2}k} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1-2k}}{k}$

1. Fall: $k < 0{,}5$ zwei verschiedene Lösungen $L = \left\{\frac{-2 \pm 2\sqrt{1-2k}}{k}\right\}$
2. Fall: $k = 0{,}5$ eine Lösung $L = \left\{\frac{-2}{k}\right\}$
3. Fall: $k > 0{,}5$ keine Lösung $L = \emptyset$

f) $x^2 - (k+3)x + 3k = 0$

$x_{1/2} = \frac{(k+3) \pm \sqrt{\left(-(k+3)\right)^2 - 12k}}{2}$

$= \frac{k+3 \pm \sqrt{k^2+6k+9-12k}}{2}$

$= \frac{k+3 \pm \sqrt{k^2-6k+9}}{2}$

$= \frac{k+3 \pm \sqrt{(k-3)^2}}{2}$

$= \frac{k+3 \pm (k-3)}{2}$

$x_1 = \frac{k+3-(k-3)}{2} = 3$

$x_1 = \frac{k+3+(k-3)}{2} = k$

1. Fall: $k = 3$ eine Lösung $L = \{3\}$
2. Fall: $k \neq 3$ zwei verschiedene Lösungen $L = \{3; k\}$

3.

a) $x^2 + 4x - 2 = 0$ bzw. $x^2 + 4x + 4 = 0$

b) $x^2 + 4x = 0$; $L = \{0; -4\}$

c) $D = 16 - 8c$

1. Fall: $D > 0$ für $c < 2$ zwei verschiedene Lösungen
2. Fall: $D = 0$ für $c = 2$ eine (doppelte) Lösung
3. Fall: $D < 0$ für $c > 2$ keine Lösung

d) Für $c < 2$ zwei verschiedene Lösungen $L = \{-2 \pm \sqrt{4-2c}\}$

4. $x^2 + (2d-2)x + (d-1) = 0$

$D = (2d-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (d-1) = 4d^2 - 12d + 8$

$D = 0 \Leftrightarrow d_1 = 1 \vee d_2 = 2$. Für $d_1 = 1$ ist $L = \{0\}$, für $d_2 = 2$ ist $L = \{-1\}$

5.

a) $x_1 = k, x_2 = 2k$

1. Fall: $k = 0$
Eine Lösung
$L = \{0\}$

2. Fall: $k \neq 0$
Zwei Lösungen
$L = \{k; 2k\}$

b) $L = \{1; 3\}$

c) $D = 4 - 4k$

1. Fall: $D > 0$ für $k < 1$
zwei verschiedene Lösungen
$L = \{-2 \pm \sqrt{1-k}\}$

2. Fall: $D = 0$ für $k = 1$
eine (doppelte) Lösung
$L = \{-2\}$

3. Fall: $D < 0$ für $k > 1$
keine Lösung
$L = \emptyset$

d) $ax(x-a) = 0, x_1 = 0, x_2 = a$
Wegen $a \neq 0$ zwei Lösungen $L = \{0; a\}$

e) $D = \frac{1}{4}t^2$

1. Fall: $t = 0$
Eine Lösung
$L = \{0\}$

2. Fall: $t \neq 0$
Zwei Lösungen
$L = \left\{\frac{t}{2}, t\right\}$

f) $D = b^2 - 36$
1. Fall: $b < -6$ zwei Lösungen: $L = \left\{\frac{-b-\sqrt{b^2-36}}{6}; \frac{-b+\sqrt{b^2-36}}{6}\right\}$
2. Fall: $b = -6$ eine Lösung: $L = \{1\}$
3. Fall: $-6 < x < 6$ keine Lösung: $L = \emptyset$
4. Fall: $b = 6$ eine Lösung: $L = \{-1\}$
5. Fall: $b > 6$ zwei Lösungen: $L = \left\{\frac{-b-\sqrt{b^2-36}}{6}; \frac{-b+\sqrt{b^2-36}}{6}\right\}$

g) $x^2 + (3-2d)x - 6d = 0$
$D = (3-2d)^2 + 24d = 9 - 12d + 4d^2 + 24d = 9 + 12d + 4d^2 = (3+2d)^2$

1. Fall: $d = -\frac{3}{2}$
Eine Lösung
$L = \{-3\}$

2. Fall: $d \neq -\frac{3}{2}$
Zwei Lösungen
$L = \{-3; 2d\}$

h) $(m-3)x^2 + (m+2) \cdot x + 1 = 0$
$D = (m+2)^2 - 4 \cdot (m-3) \cdot 1 = m^2 + 4m + 4 - 4m + 12 = m^2 + 16 > 0$

1. Fall:
Für alle $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ zwei verschiedene Lösungen $L = \left\{\frac{-(m+2)\pm\sqrt{m^2+16}}{2(m-3)}\right\}$

2. Fall:
Für $m = 3$ ergibt sich die lineare Gleichung $5x + 1 = 0$ mit $L = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$

6.

a) z.B. $(x-1)(x-a) = 0$
b) z.B. $(x-b)^2 = 0$
c) z.B. $x^2 - c^2 = 0$

7.

a) $L = \{a\}$

b) $L = \{2b - 3; 2b + 3\}$

c) $L = \{-2; 0\}$

d) $L = \{2d\}$