Quadratische Gleichungen
Übung

1. Entscheiden Sie, ob eine quadratische Gleichung in x vorliegt.

	Ja	Nein
a) $x^2 - 4x + 5 = 0$	☐	☐
b) $x - 3^2 = 6x + 1$	☐	☐
c) $x^2 = 5$	☐	☐
d) $x^2 - 2x = 0$	☐	☐
e) $x^2 - x = x^2 - 1$	☐	☐
f) $a^2 + 2x + 5 = a + 1$	☐	☐
g) $(x+1) \cdot (x-3) = 0$	☐	☐

2. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Lösungen.

a) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$

b) $2x^2 + x + 2 = 0$

c) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0$

d) $x^2 + 6 = 4$

e) $-\frac{1}{6}x^2 + 2x = -3$

f) $-\frac{1}{3}(x-4)^2 = 0$

3. Die Mitternachtsformel $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ist die Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Erläutern Sie Definition und Bedeutung der Diskriminante.

4. Füllen Sie die Lücken ($\square$) aus.

a) $-\frac{2}{3}x^2 + \square + 2 = \frac{1}{3}x + \square$

$-\frac{2}{3}x^2 + \square - 1 = 0 \mid \cdot 3$

$-2x^2 + 5x - \square = 0$

$x_{1/2} = \frac{\square \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot \square}}{2 \cdot \square}$

$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{\square}}{-4}$

$L = \square$

b) $3x^2 + 4x - \square = 0$

$x_{1/2} = \frac{\square \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot \square}$

$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{\square}}{6}$

$L = \square$

5. Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel. Definitionsmenge aller Gleichungen ist jeweils $\mathbb{R}$.

   a) $x^2 - 3x + 2 = 0$
   b) $x^2 + x - 12 = 0$
   c) $3x^2 - 3x - 18 = 0$
   d) $x^2 - 9x + 3 = 0$
   e) $0 = \frac{1}{2}(1 + x^2) + x$
   f) $3x^2 + 2x + 2 = 0$
   g) $\frac{1}{5}x^2 - 2x + 5 = 0$
   h) $0 = \frac{4}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 3$
   i) $0 = 4x^2 - 3x + \frac{1}{2}$
   j) $0 = \frac{2}{3}x^2 + x - 3$
   k) $\frac{1}{2}x(x - 1) + 14 = 0$
   l) $4{,}1x^2 + 0{,}2x - 2{,}6 = 0$
   m) $12x^2 - 3x = 5x - 6$
   n) $17x^2 + 4x - 12 = 13x^2 + 6x - 8$
   o) $(x - 2)^2 = (2x)^2 - 2^2$
   p) $(x - 8)^2 + 3x - 4 = 2x^2 - 8x + 3$
   q) $x^4 - x^3 = (x + 1)(x - 4)(x - 1)(x + 3)$

6. Berechnen Sie vorteilhaft die Lösungsmenge folgender Gleichungen in der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$.

   a) $x^2 - 16 = 0$
   b) $x^2 + 3 = 3$
   c) $\frac{1}{9}x^2 - 4 = 0$
   d) $6x^2 - 12x = 0$
   e) $-\frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{4}x = 0$
   f) $6x = -3x^2$
   g) $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 3 = 0$
   h) $\frac{2}{3}x^2 + 2x = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$
   i) $8x^2 - 24x + 18 = 0$
   j) $4x^2 = 20$

7. Ermitteln Sie eine quadratische Gleichung, welche die Diskriminante 2 besitzt.

8. Geben Sie jeweils eine quadratische Gleichung an, die folgende Lösungsmenge besitzt.

   a) $L = \emptyset$
   b) $L = \{-4\}$
   c) $L = \{-2; 3\}$

Quadratische Gleichungen
Lösung

1.

		Ja	Nein
a)	$x^2 - 4x + 5 = 0$	X	☐
b)	$x - 3^2 = 6x + 1$	☐	X
c)	$x^2 = 5$	X	☐
d)	$x^2 - 2x = 0$	X	☐
e)	$x^2 - x = x^2 - 1$	☐	X
f)	$a^2 + 2x + 5 = a + 1$	☐	X
g)	$(x + 1) \cdot (x - 3) = 0$	X	☐

2.

a) $D = (-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 4 - 4 = 0$ eine Lösung
b) $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 < 0$ keine Lösung
c) $D = (-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 9 - 8 = 1 > 0$ zwei verschiedene Lösungen#
d) Keine Lösung
e) Zwei Lösungen
f) Eine Lösung

3. Der Ausdruck unter der Wurzel, $D = b^2 - 4ac$ wird Diskriminante genannt. Sie gibt die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung an.
Ist $D < 0$, so besitzt die Gleichung keine Lösung, ist Sie gleich null, dann existiert eine Lösung. Für den Fall $D > 0$ hat die quadratische Gleichung die maximale Anzahl an Lösungen, nämlich zwei.

4.

a) $-\frac{2}{3}x^2 + 2x + 2 = \frac{1}{3}x + 3$

$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x - 1 = 0 \mid \cdot 3$

$-2x^2 + 5x - 3 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-2)}$

$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{-4}$

$L = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$

b) $3x^2 + 4x - 5 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3}$

$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{76}}{6}$

$L = \left\{\frac{-2 - \sqrt{19}}{3}; \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}\right\}$

5.

a) $L = \{1; 2\}$
b) $L = \{-4; 3\}$
c) $L = \{-2; 3\}$
d) $L = \left\{\frac{9 \pm \sqrt{69}}{2}\right\} \approx \{0{,}35; 8{,}65\}$
e) $L = \{-1\}$
f) $L = \emptyset$
g) $L = \{5\}$
h) $L = \emptyset$
i) $L = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right\}$
j) $L = \left\{-3; \frac{3}{2}\right\}$
k) $L = \{4; 7\}$
l) $L = \left\{\frac{-0{,}2 \pm \sqrt{42{,}68}}{8{,}2}\right\} \approx \{-0{,}82; 0{,}77\}$
m) $L = \emptyset$
n) $L = \left\{\frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}\right\} \approx \{-0{,}78; 1{,}28\}$
o) $L = \left\{4 \pm \sqrt{8}\right\} \approx \{1{,}71; 6{,}83\}$
p) $L = \left\{\frac{21 \pm \sqrt{669}}{-2}\right\} \approx \{-23{,}43; 2{,}43\}$
q) $L = \left\{-1; \frac{12}{13}\right\}$

6.

a) Direktes Auflösen nach x oder mit der 3. Binomischen Formel: $L = \{-4; 4\}$
b) Subtraktion von 3 auf beiden Seiten liefert die Lösung $L = \{0\}$
c) $\frac{1}{9}$ ausklammern und Auflösen nach x: $L = \{-6; 6\}$
d) $6x(x-2) = 0$, also $L = \{0; 2\}$
e) $-\frac{5}{6}x$ ausklammern ergibt $L = \left\{0; \frac{9}{10}\right\}$
f) $3x^2$ auf beiden Seiten addieren, dann $3x$ ausklammern: $L = \{-2; 0\}$
g) $\frac{1}{3}$ ausklammern, dann 1. Binomische Formel: $L = \{-3\}$
h) Alles nach links bringen, dann $\frac{4}{3}x$ ausklammern: $L = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$
i) 8 ausklammer, dann 2. Binomische Formel: $L = \left\{\frac{3}{2}\right\}$
j) Durch 4 teilen, dann Wurzel ziehen: $L = \left\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right\} \approx \{-2{,}24; 2{,}24\}$

7. Beispielsweise die Gleichung $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 7 = 0$ besitzt die Diskriminante $D = 4^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 = 2$.
Eine Möglichkeit zum Finden einer solchen Gleichung wäre a und b vorzugeben (hier ist $a = \frac{1}{2}$ und $b = 4$) und dann ein passendes c (in diesem Fall $c = 7$) zu finden.

8.

a) z.B. $x^2 + 1 = 0$
b) z.B. $(x+4)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = 0$
c) z.B. $(x+2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$