e-Funktion • Anwendungen
Übung

1. Radioaktiver Zerfall

Radioaktives Radon ^{222}Rn zerfällt nach dem Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$. Dabei ist

t	Zeit in Tagen
$N(t)$	Anzahl der unzerfallenen Kerne zur Zeit t
$N(0) = N_0$	Unzerfallene Kerne zum Startzeitpunkt $t = 0$
λ („lambda“)	Materialabhängige Zerfallskonstante.

In der Rechnung kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind sinnvoll zu runden.

1.1. Nach einer Woche sind von 5,00 Mol ^{222}Rn noch 1,40 Mol übriggeblieben. Bestimmen Sie hiermit die Zerfallskonstante λ. (3 BE)
[Lösung: $\lambda = 0{,}182$]

1.2. Wie viele Teilchen sind von den ursprünglich 5,00 Mol nach zwei Tagen übrig? Ermitteln Sie auch, wie lange es dauert, bis noch 12,5% des ursprünglich vorhandenen Radons unzerfallen ist. (5 BE)

1.3. Skizzieren Sie den Graphen der Zerfallsfunktion von Radon in ein geeignetes Koordinatensystem für einen Zeitraum von zwei Wochen ein. (3 BE)

1.4. Die Halbwertszeit T ist die Zeitdauer, in der die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Atome zerfallen ist. Entnehmen Sie aus Ihrem Graphen die ungefähre Halbwertszeit und berechnen Sie T anschließend. (4 BE)

1.5. Die negative erste Ableitung von N(t) nach der Zeit wird mit Aktivität bezeichnet: (3 BE)

$$A(t) = -\frac{d}{dt}N(t) = -\dot{N}(t)$$

Zeigen Sie: $A(t) = N_0 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t}$. Berechnen Sie die Aktivität von 5,00 Mol Radon zu Beginn der Rechnung und nach 10 Tagen.

2. Intelligenzquotient

Der Intelligenzquotient in der Bevölkerung ist nach der Glockenkurve $\varphi: x \mapsto \varphi(x)$ von Gauß mit

$$\varphi(x) = \frac{1}{15\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{-(x-100)^2}{450}}$$

im Definitionsbereich $D_\varphi = [0; 200]$ verteilt.

2.1. Berechnen Sie den Anteil in der Bevölkerung mit einem Intelligenzquotienten von 90 sowie von 115. (2 BE)

2.2. Bestimmen Sie das Extremum (Lage und Art) sowie die Wendepunkte dieser Verteilung. (8 BE)
[Hinweis: $\varphi'''(85) \neq 0$ und $\varphi'''(115) \neq 0$ kann vorausgesetzt werden.]

2.3. Skizzieren Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_φ von φ im Definitionsbereich. (4 BE)

3. Zinseszins (exponentielles Wachstum)

Ein zu einem festen Zinssatz p angelegtes Startkapital K_0 entwickelt sich im Laufe der Zeit t (in Jahren) nach der Funktion

$$K(t) = K_0 \cdot (1 + p)^t; t \geq 0.$$

3.1. Welches Guthaben besitzt man nach einer Einmaleinlage von…. (3 BE)

a) ... 100 € auf ein Sparbuch ($p = 0{,}25\%$) in 100 Jahren?
b) ... 1 000 € bei festverzinslichen Wertpapieren ($p = 4{,}5\%$) in sieben Jahren?
c) ... 100 000 $ mit einem Aktieninvestment (durchschnittlich 23% pro Jahr) in 65 Jahren?

3.2. Begründen Sie rechnerisch, dass man K(t) auch in der Form

$$K(t) = K_0 \cdot e^{t \cdot \ln(1+p)}$$

schreiben kann.

3.3. Wie lange dauert es, bis man bei einem Startkapital von 100 000 € und einem Zinssatz von 8% Millionär geworden ist? (4 BE)

3.4. Welchen Zinssatz benötigt man, wenn man mit nur 50 000 € in 40 Jahren zum Millionär werden möchte? (3 BE)

3.5. Ein (sehr reicher) Finanzexperte behauptet, die jährliche Inflationsrate betrage 4,5%. Wie lange würde es unter dieser Voraussetzung dauern, bis sich der Wert des Geldes halbiert hat? (4 BE)

4. Pilzwachstum (angelehnt an AP 2005 BOS/FOS 13 nt in Bayern) **(Logistisches Wachstum)**

Die Anzahl p der Pilze einer Kultur in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden wird für $t \geq 0$ durch den Funktionsterm $p(t) = \frac{1000}{1+7e^{-t}}$ beschrieben. Im Funktionsterm und bei Berechnungen wird auf Benennungen verzichtet.

4.1. Bestimmen Sie die Anzahl der Pilze zum Zeitpunkt $t = 0$ und nach sehr langer Beobachtungszeit. Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1, zu dem die Pilzkultur 875 Pilze enthält. (5 BE)

4.2. Nun wird die Ableitungsfunktion $\dot{p}: t \mapsto \dot{p}(t)$ mit $\dot{p}(t) = \frac{dp}{dt}$ und $t \geq 0$ betrachtet. Interpretieren Sie $\dot{p}(t)$ im gegebenen Sachzusammenhang und zeigen Sie, dass die Anzahl der Pilze im gesamten Beobachtungszeitraum echt monoton zunimmt. [Teilergebnis: $\dot{p}(t) = \frac{7000e^{-t}}{(1+7e^{-t})^2}$] (5 BE)

4.3. Ohne Nachweis kann im Folgenden verwendet werden, dass $\dot{p}(t)$ für $t_2 = \ln(7)$ seinen maximalen Wert annimmt. Zeichnen Sie den Graphen von $\dot{p}(t)$ für $0 \leq t \leq 6$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem. (Maßstab: t-Achse: 1 h $\hat{=}$ 2 cm; $\dot{p}(t)$-Achse: 100 Pilze/h $\hat{=}$ 1 cm; zeichnen Sie Ihr Koordinatensystem mindestens 10 cm in positive y-Richtung) (5 BE)

4.4. Skizzieren Sie unter Verwendung der Eigenschaften des Graphen von $\dot{p}(t)$ den Graphen von p in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 4.3. (Maßstab: t-Achse: 1 h $\hat{=}$ 2 cm; p-Achse: 100 Pilze $\hat{=}$ 1 cm) (3 BE)

5. Verbreitung eines Blogs (Beschränktes Wachstum)

Die Verbreitung eines Blogs im Internet kann durch die Funktion $B(t) = 6000 \cdot \left(1 - e^{-kt}\right)$ beschrieben werden. Dabei gibt B(t) die Anzahl an Klicks nach der Zeit t in Wochen nach Veröffentlichung an. $k \in \mathbb{R}$ ist eine feste Konstante. Nach einer Woche wurde der Blog genau 2 154-mal geklickt.

5.1. Berechnen Sie die Anzahl der Aufrufe des Blogs zu Beginn der Zeitrechnung sowie den Wert der Konstanten $k \in \mathbb{R}$ auf drei Nachkommastellen gerundet. [Lösung: $k \approx 0{,}445$] (4 BE)

5.2. Wie oft wurde der Blog nach sehr langer Zeit gelesen? (2 BE)

5.3. Der Verfasser möchte gerne wissen, wann 4 500 Nutzer den Eintrag gelesen haben. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt auf den Tag genau. (4 BE)

5.4. Skizzieren Sie den Graphen von B(t) für die ersten zehn Wochen nach Onlinestellung. (4 BE)

6. Medikamentenabgabe

Nach einem Unfall soll einem Patienten kontinuierlich ein Medikament verabreicht werden. Die verabreichte Menge $n(t)$ kann näherungsweise durch $n(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt}; t \geq 0, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ beschrieben werden. Der Wert $n(t)$ gibt die verabreichte Menge an Schmerzmittel in Milligramm (mg) an und t die seit der Einlieferung vergangene Zeit in Stunden. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

6.1. Dem Patienten werden nach einer Stunde 1,78 mg und nach 12 Stunden 2,36 mg an Schmerzmittel verabreicht. Berechnen Sie mit diesen Angaben die reellen Parameter a und b der Funktion n. (4 BE)

Ab hier gilt $a = 2{,}17$ und $b = 0{,}20$.
Alle folgenden Ergebnisse sind auf drei geltende Ziffern zu runden.

6.2. Bestimmen Sie die maximale Schmerzmittelmenge, die dem Patienten verabreicht worden ist. (5 BE)
[Mögliches Teilergebnis: $\dot{n}(t) = (2{,}17 - 0{,}434t) \cdot e^{-0{,}20t}$]

6.3. Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen G_n für die ersten 24 Stunden der Medikamentenabgabe in ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem. (3 BE)

7. Kaffeetemperatur (Beschränkte Abnahme)

Eine Tasse mit frisch gebrühtem Kaffee der Temperatur 80°C kühlt nach der Funktion $T(t) = a + b \cdot e^{-c \cdot t}$ ab. Dabei ist T die von der Zeit t (in Minuten) abhängige Temperatur (in °C) und $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Auf die Angabe von Einheiten soll verzichtet werden. Runden Sie alle Werte gegebenenfalls auf drei Nachkommastellen.

7.1. Nach sehr langer Zeit ist der Kaffee auf 20°C abgekühlt. Begründen Sie, dass $a = 20$ und $b = 60$ sein muss. (2 BE)

7.2. Nach einer Viertelstunde ist der Kaffee auf 53°C abgekühlt. Berechnen Sie damit den Wert von $c \in \mathbb{R}^+$. (3 BE)
[Ergebnis: $c = 0{,}040$]

7.3. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von T keine Wendepunkte besitzt. (3 BE)

7.4. Berechnen Sie $\dot{T}(60) = \frac{dT}{dt}(60)$ sowie $\frac{T(75)-T(45)}{75-45}$. Interpretieren Sie beide Werte im Sachzusammenhang. (4 BE)

7.5. Skizzieren Sie den Graphen von T für die ersten zwei Stunden des Abkühlungsprozesses. (3 BE)

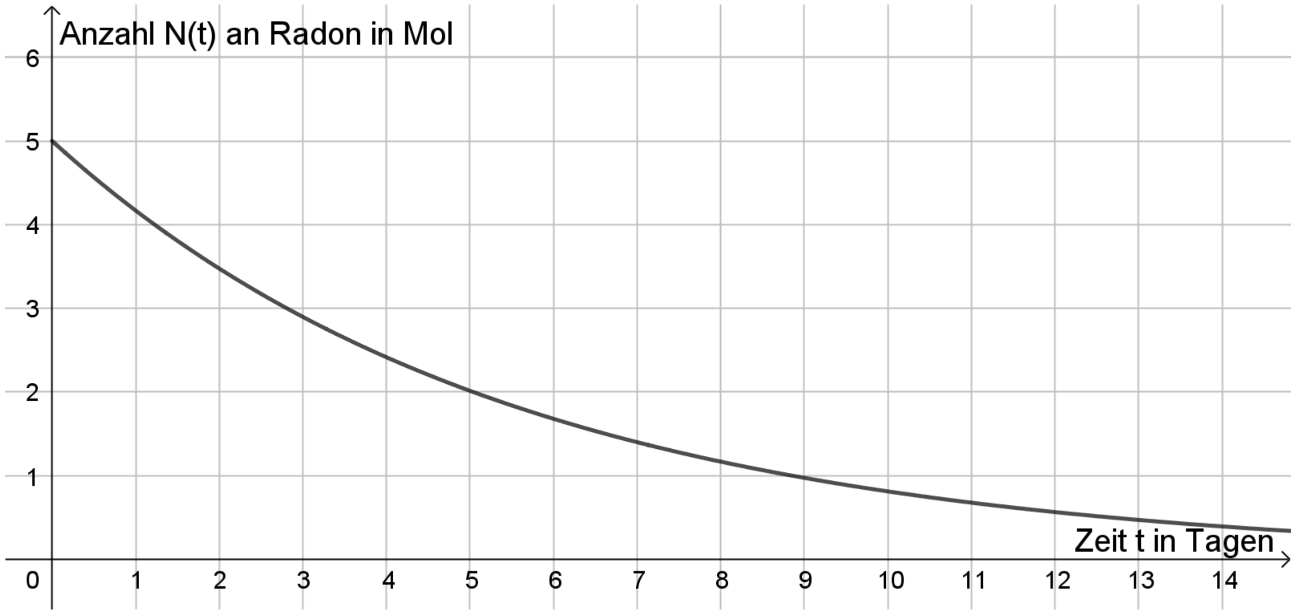
e-Funktion • Anwendungen
Lösung

1. Radioaktiver Zerfall

1.1. $\lambda = \frac{\ln(0{,}28)}{-7} \approx 0{,}182\ \left(\frac{1}{d}\right)$; die Einheit d gibt die Anzahl der Tage an.

1.2. $N(2) \approx 3{,}47$ (Mol); $N(t) = 0{,}125 \cdot N_0$ gilt nach 11,4 Tagen.

1.3.



1.4. $T = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}182} \approx 3{,}81$ (d)

1.5. $A(t) = 0{,}91 \cdot e^{-0{,}182t}$
$A(0) = 0{,}91\ \left(\frac{\text{Mol}}{d}\right)$
$A(10) \approx 0{,}147\ \left(\frac{\text{Mol}}{d}\right)$

2. Intelligenzquotient

2.1.
$\varphi(90) \approx 0{,}0377$, also ca. 3,77%
$\varphi(115) \approx 0{,}0286$, d.h. rund 2,86%

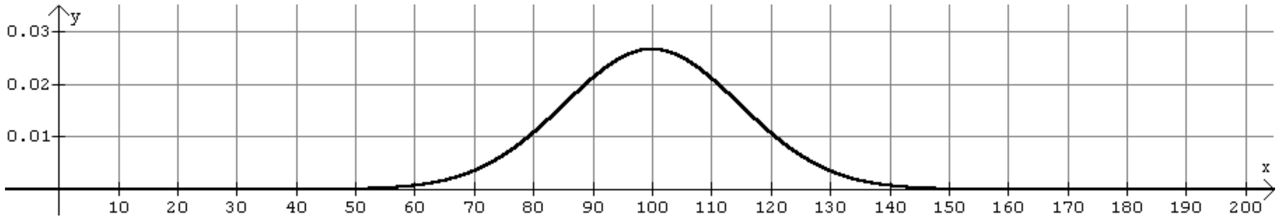
2.2.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-100)^2}{450}} \cdot \left(\frac{-2(x-100)}{450}\right) = \frac{-1}{3375\sqrt{2\pi}}(x-100) \cdot e^{\frac{-(x-100)^2}{450}}$$

$$\varphi''(x) = \frac{-1}{3375\sqrt{2\pi}} \cdot \left(1 - \frac{(x-100)^2}{225}\right) \cdot e^{\frac{-(x-100)^2}{30}}$$

HOP(100; 0,02660)
WEP_1(85; 0,01613)
WEP_2(115; 0,01613)

2.3.



3. Zinseszins

3.1.

a) $100\,€ \cdot (1 + 0{,}0025)^{100} \approx 128{,}36\,€$

b) $1\,000\,€ \cdot (1 + 0{,}045)^{7} \approx 1\,360{,}86\,€$

c) $100\,000\,\$ \cdot 1{,}23^{65} \approx 69{,}8\text{ Mrd.}\,\$$
Wenn Sie denken, eine derartige Rendite ist auf so lange Sicht nicht möglich, dann informieren Sie sich doch bitte über den US-Investor Warren Buffett. Er hat 1965 mit 100 000 \$ begonnen zu investieren und eine durchschnittliche Jahresrendite von ca. 23 % erreicht.

3.2. Ein Basiswechsel funktioniert nach dem Prinzip $K_0 \cdot \ (1+p)^t = K_0 \cdot e^{\ln((1+p)^t)}$, da sich e und ln gegenseitig aufheben. Mit den Logarithmusgesetzen kann man das t vor den ln stellen und erhält direkt $K(t) = K_0 \cdot e^{t \cdot \ln(1+p)}$

3.3. $t \approx 29{,}92$ a (Hinweis: Ein Rechnen mit der Formel aus 3.2. erleichtert die Arbeit etwas.)

3.4. $p \approx 7{,}78\%$

3.5. $T_{1/2} \approx 15{,}05$ a; a ist das Kürzel für Jahre.

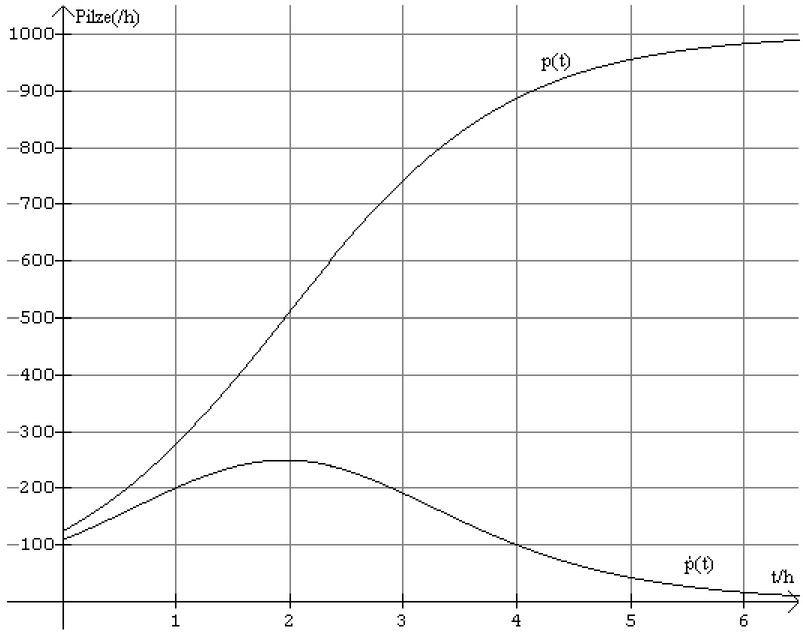
4. Pilzwachstum

4.1. $p(0) = 125$
$\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = 1000$
$t_1 = \ln 49 \approx 3{,}89$

4.2. $\dot{p}(t)$ gibt die Wachstumsgeschwindigkeit der Pilzkultur an.
$\dot{p}(t) = \frac{0\cdot(1+7e^{-t}) - 1000\cdot(1+7e^{-t})(-7e^{-t})}{(1+7e^{-t})^2} = \frac{7000e^{-t}}{(1+7e^{-t})^2}$
Wegen $7000e^{-t} > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $(1+7e^{-t})^2 > 0$ für alle $t \geq 0$ ist $\dot{p}(t) \geq 0$
$\Rightarrow p(t)$ ist echt monoton zunehmend für $t > 0$.

4.3./4.4.

t/h	0	1	ln(7) ≈ 1,95	3	4	5	6
$\dot{p}(t)$ (0 NKS)	109	201	250	192	101	43	17
$p(t)$ (0 NKS)	125	280	500	742	886	955	983



5. Verbreitung eines Blogs

5.1. $B(0) = 0$;
$B(1) = 2154 \Rightarrow k \approx 0{,}445$

5.2. $\lim\limits_{t \to \infty} B(t) = 6\ 000$

5.3. $B(t) = 4500 \Rightarrow t \approx 3{,}12$, es dauert also rund 22 Tage.

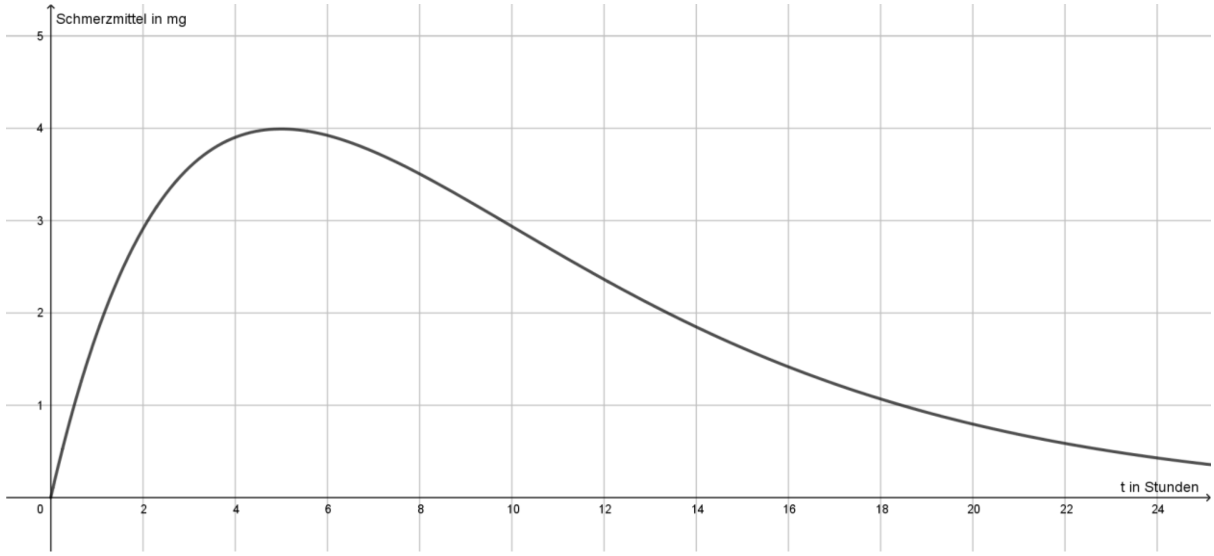
5.4.

6. Medikamentenabgabe

6.1. $n(1) = 1{,}78 \Leftrightarrow a \cdot e^{-b} = 1{,}78 \Leftrightarrow a = 1{,}78 \cdot e^{b}$ (I)
$n(12) = 2{,}36 \Leftrightarrow 12a \cdot e^{-12b} = 2{,}36$ (II)
(I) in (II): ergibt $b \approx 0{,}20$
in (I): $a = 1{,}78 \cdot e^{-0{,}2} \approx 2{,}17$

6.2. Ab hier ist $n(t) = 2{,}17t \cdot e^{-0{,}20t}$.
$\dot{n}(t) = 1{,}08 \cdot e^{-0{,}2t} + 1{,}08t \cdot e^{-0{,}2t} \cdot (-0{,}2) = 1{,}08 \cdot (1 - 0{,}2t) \cdot e^{-0{,}2t}$
$\dot{n}(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5$
Wegen $1{,}08 \cdot e^{-0{,}2t} > 0$ ist nur der Ausdruck $y = 1 - 0{,}2t$ ausschlaggebend für den Vorzeichenwechsel (VZW) von $\dot{n}(t)$.
Es handelt sich dabei um einen VZW von „+“ nach „−“ bei $t = 5$, also befindet sich ein Maximum bei HOP$(5; 3{,}99)$.

6.3.



7. Kaffeetemperatur

7.1. $\lim\limits_{t\to\infty} a + b \cdot e^{-c\cdot t} = 20 \Rightarrow a = 20$
Wegen $T(0) = a + b = 80$ muss $b = 60$ gelten

7.2. $T(15) = 53$
$20 + 60 \cdot e^{-15c} = 53$
$60 \cdot e^{-15c} = 33$
$e^{-15c} = \frac{33}{60}$
$-15c = \ln\left(\frac{33}{60}\right)$
$c = \frac{\ln\left(\frac{33}{60}\right)}{-15} \approx 0{,}040$

7.3. $\dot{T}(t) = 60 \cdot e^{-0{,}040\cdot t} \cdot (-0{,}040) = -2{,}4 \cdot e^{-0{,}040\cdot t}$

$\ddot{\mathrm{T}}(\mathrm{t}) = -2{,}4 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}040\cdot\mathrm{t}} \cdot (-0{,}040) = 0{,}096 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}040\cdot\mathrm{t}}$

$\ddot{\mathrm{T}}(\mathrm{t}) = 0 \Leftrightarrow 0{,}096 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}040\cdot\mathrm{t}} = 0$ nicht möglich, da $\mathrm{e}^{-0{,}040\cdot\mathrm{t}} > 0$

7.4. $\dot{\mathrm{T}}(60) \approx -0{,}218$

Der Kaffee kühlt nach einer Stunde um 0,218°C pro Minute ab.

$\frac{\mathrm{T}(75)-\mathrm{T}(45)}{75-45} \approx -0{,}231$

In der Zeit zwischen der 45. und der 75. Minute kühlt der Kaffee um durchschnittlich 0,231°C pro Minute ab.

7.5. Es ist $\mathrm{T}(120) \approx 20{,}494$.