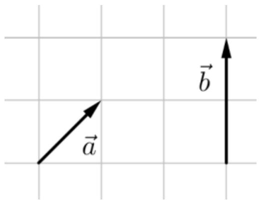
Basis und Dimension

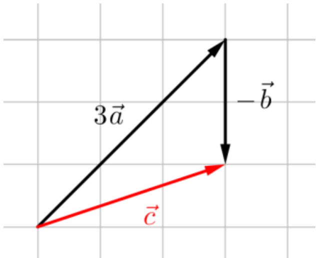
Eine **Basis** eines Vektorraumes ist eine Menge linear unabhängiger Vektoren, die den Vektorraum erzeugen. Das bedeutet, dass sich jeder Vektor eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren schreiben lässt.
Die Anzahl dieser Basisvektoren heißt **Dimension** des Vektorraumes.

Beispiele

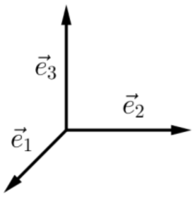
1) Der $\mathbb{R}^2$ ist besitzt die Dimension 2, eine Basis ist unter anderem $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.



Zum Beispiel kann der Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ durch $\vec{c} = 3 \cdot \vec{a} - 1 \cdot \vec{b}$ eindeutig geschrieben werden.



2) Die **Standard-Orthonormalbasis** des $\mathbb{R}^3$ ist $\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$



Die Standard-Orthonormalbasis ist **normiert**, d.h. jeder Vektor besitzt den Betrag 1. Außerdem steht jeder Vektor auf den anderen beiden senkrecht. So lässt sich beispielsweise der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\-3\\7\end{pmatrix}$ eindeutig und ohne Rechnung durch $\vec{a} = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3$ kombinieren.

3) Drei beliebige linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Die Schreibweise $\vec{a}_B$ bedeutet den Vektor $\vec{a}$ bezüglich einer Basis B, so ist für die Basis $B = \left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$ und $\vec{a}_B = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ der Vektor $\vec{a} = 3 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$.