Bernoulli-Ketten
Info

Ein Zufallsexperiment, das nur zwei verschiedene Ausgänge besitzt, nennen wir **Bernoulli-Experiment**.

Beispiele für Bernoulli-Experimente:

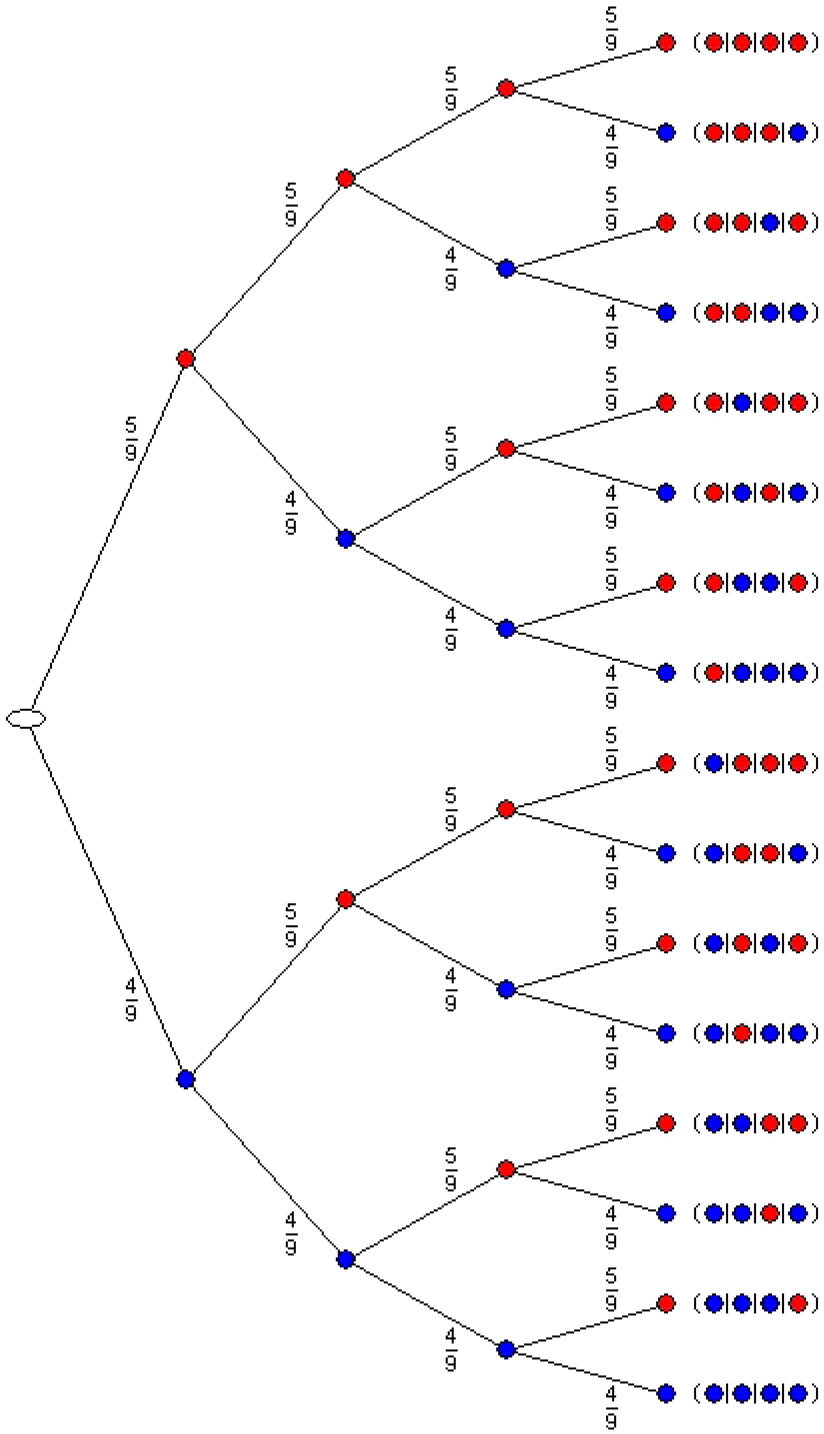
- Werfen einer Münze: $\Omega = \{\mathrm{W}; \mathrm{Z}\}$ („Wappen oder Zahl")
- Ziehen eines Loses: $\Omega = \{\mathrm{T}; \mathrm{N}\}$ („Treffer oder Niete")
- Werfen eines Würfels: $\Omega = \{6; \overline{6}\}$ („Sechs oder nicht sechs")

Ein Zufallsexperiment, das aus n unabhängigen, gleichen Bernoulli-Experimenten besteht, heißt **Bernoulli-Kette** der Länge n.

Beispiele für Bernoulli-Ketten:

- Eine Münze wird dreimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dabei genau zweimal Wappen zu erhalten?
  Es ist $\Omega = \{\mathrm{WWW}; \mathrm{WWZ}; \mathrm{WZW}; \mathrm{WZZ}; \mathrm{ZWW}; \mathrm{ZWZ}; \mathrm{ZZW}; \mathrm{ZZZ}\}$. Jedes dieser einzelnen Ergebnisse besitzt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Genau ein Wappen ist in den drei Ergebnisse WZZ, ZWZ und ZZW enthalten, damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

- Aus einer Urne mit 5 roten und 4 blauen Kugeln werden 4 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei blaue Kugeln zu ziehen?
  Es gibt $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten, die beiden blauen Kugeln auf die vier Positionen zu verteilen. In jedem dieser Ergebnisse müssen zwei Blaue und zwei rote Kugeln gezogen werden mit jeweils der Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2$.
  Gesamt ergibt sich $\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 \approx 0{,}36580$.



Baumdiagramm zum zweiten Beispiel zu Bernoulli-Ketten.
Es wird viermal gezogen aus einer Urne mit 5 roten und 4 blauen Kugeln.
Dabei gibt es genau 6 Möglichkeiten, dass sich unter den
vier gezogenen Kugeln genau zwei blaue befinden.

Allgemein gilt die Formel

$$P(\text{"k Treffer"}) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Formel von Bernoulli

Dabei ist
- n die Anzahl der Teilexperimente, also die Länge der Kette
- p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer
- k die Anzahl der Treffer

Beispiel zur Verwendung der Formel von Bernoulli: Sechsmaliges Werfen mit einer Münze

a) E_1: „Genau zweimal Wappen“

$n = 6; p = 0{,}5; k = 2$

$P(E_1) = B(6; 0{,}5; 2) = \binom{6}{2} \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^4 = 15 \cdot 0{,}5^6 \approx 0{,}23438$

b) E_2: „Höchstens zweimal Wappen“

$n = 6; p = 0{,}5; k = 0; 1; 2$

$P(E_2) = B(6; 0{,}5; 0) + B(6; 0{,}5; 1) + B(6; 0{,}5; 2)$
$= \binom{6}{0} \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^6 + \binom{6}{1} \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^5 + \binom{6}{2} \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^4$
$\approx 0{,}01563 + 0{,}09375 + 0{,}23438 = 0{,}34376$

c) E_3: „Mindestens einmal Wappen“

$n = 6; p = 0{,}5; k = 1; 2; 3; 4; 5; 6$

$P(E_3) = 1 - P(\text{"Keinmal Wappen"})$
$= 1 - B(6; 0{,}5; 0)$
$= 1 - \binom{6}{0} \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^6$
$\approx 1 - 0{,}01563 = 0{,}98437$