Binomialverteilung

Eine Zufallsgröße X mit den Zufallswerten k ($0 \leq k \leq n$) ist nach $B(n; p)$ **binomial verteilt**, wenn gilt:

$$P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, k = 0,1,2,\ldots, n.$$

Eine binomial verteilte Zufallsgröße entsteht immer, wenn dasselbe **Bernoulli-Experiment** mehrfach hintereinander durchgeführt wird.

Die **kumulative Verteilungsfunktion** der Binomialverteilung lautet:

$$P(X \leq k) = F_{n;p}(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \text{ für } k = 0,1,2,\ldots, n.$$

Die kumulative Verteilungsfunktion ergibt sich durch Aufsummieren Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung bis zu einem bestimmten Wert k.

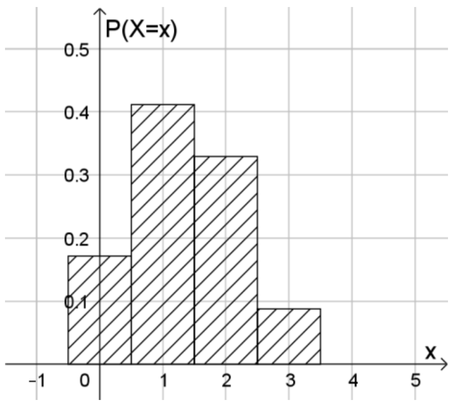
Beispiel:

In einer Urne befinden sich vier rote und fünf blaue Kugeln. Es werden drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der gezogenen roten Kugeln.

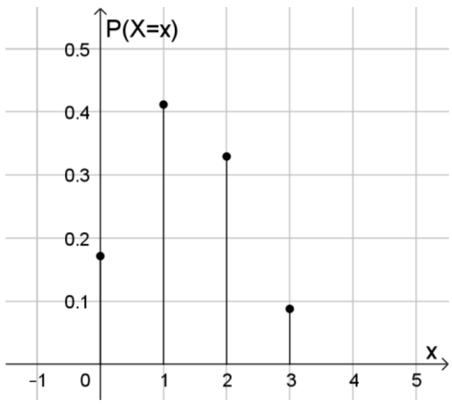
Die Teilexperimente sind voneinander unabhängig und je Experiment gibt es nur zwei verschiedene Merkmale, daher handelt es sich um eine binomial verteilte Zufallsgröße mit $n = 3$ und $p = \frac{4}{9}$.
Binomialverteilung: $B\left(3; \frac{4}{9}; k\right) = \binom{3}{k} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{3-k}$ mit $k = 0; 1; 2; 3$.

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X:

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,1715	0,4115	0,3292	0,0878



Histogramm der Zufallsgröße X



Stabdiagramm von X

Die kumulative Verteilungsfunktion $F_{n;p}$ der Zufallsgröße X sieht wie folgt aus. Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten (Wert in der Tabelle unten rechts) muss stets eins ergeben.

k	0	1	2	3
$P(X \leq k)$	0,1715	0,5830	0,9122	1

Für dieses Beispiel ergibt sich unter anderem

Die Wahrscheinlichkeit, genau eine rote Kugel zu ziehen mit $P(X = 1) = 0{,}4115$ und die Wahrscheinlichkeit, höchstens zwei rote Kugeln zu ziehen, mit $P(x \leq 2) = 0{,}9122$.

Der **Erwartungswert** $E(X)$, die **Varianz** $Var(X)$ und die **Standardabweichung** σ einer binomial verteilten Zufallsgröße lauten

$$\boxed{\begin{gathered} E(X) = \mu = n \cdot p \\ Var(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot q \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \end{gathered}}$$

Erinnerung: $q = 1 - p$ entspricht der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, also die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen.

Der Erwartungswert im Beispiel lautet $E(X) = 3 \cdot \frac{4}{9} \approx 1{,}33$,
seine Varianz $Var(X) = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(1 - \frac{4}{9}\right) \approx 0{,}47$
und seine Standardabweichung $\sigma = \sqrt{0{,}47} \approx 0{,}86$.

Man zieht daher im Durchschnitt in diesem Experiment 1,33 rote Kugeln, die Anzahl der gezogenen roten Kugeln variieren im Schnitt um 0,86 von diesem Wert.