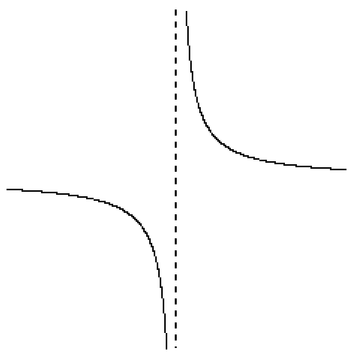
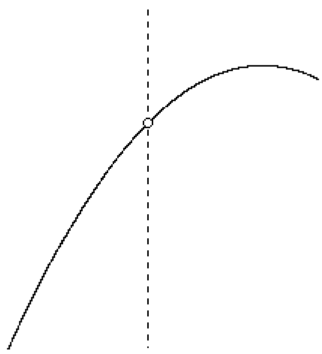
Definitionslücken bei gebrochen – rationalen Funktionen
Info

Wir untersuchen $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}$ an den Definitionslücken.

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}(x-1)}{\frac{1}{3}(x+2)(x-1)} \Rightarrow D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$$

In Bezug auf gebrochen-rationale Funktionen unterscheiden wir zwei Arten an Definitionslücken:

Unendlichkeitsstelle/Polstelle	**Hebbare Definitionslücke**
f nimmt in der Nähe einer **Polstelle** betragsmäßig immer größere Funktionswerte an.	„Loch“ im Graphen
	
Vielfachheit der Nullstelle im Nenner ist größer als die im Zähler. Die Differenz der Vielfachheiten nennen wir **Ordnung** der Polstelle.	Vielfachheit Nullstelle im Nenner $\leq$ Vielfachheit der Nullstelle im Zähler.

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{2}(x-1)}{\frac{1}{3}(x+2)(x-1)}$$

besitzt bei $x_1 = -2$ eine Polstelle 1. Ordnung
und bei $x_2 = 1$ eine hebbare Definitionslücke.

Besitzt die Funktion f eine hebbare Definitionslücke, so erhalten wir die **stetige Fortsetzung** $\tilde{f}$ von f, indem wir den entsprechenden Linearfaktor wegkürzen. Die Graphen von $\tilde{f}$ und f unterscheiden sich dann lediglich um das jeweilige Loch.

Für das obere Beispiel ist $\tilde{f}(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}(x+2)}$.

Weitere Beispiele für Definitionslücken:

1. $g(x) = \frac{(x-4)^3}{(x-4)^5}$ hat einen Pol der Ordnung $5 - 3 = 2$ bei $x_0 = 4$.

2. $h(x) = \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2}$ hebbare Definitionslücke bei $x_0 = -1$.