Ganzrationale Funktionen • Nullstellen
Info

Die **Nullstellen** einer Funktion f sind diejenigen x-Werte, für die der Funktionswert null ergibt. Sie sind damit die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$.

Beispiel:

Finden Sie alle Nullstellen der ganzrationalen Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x - 1$ in der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$.

Durch Probieren (ein anderer Weg existiert tatsächlich nicht) findet man $x_1 = -1$, denn $f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{3}(-1)^2 - \frac{5}{3}(-1) - 1 = 0$.

Nun kann f mit dem **Zerlegungssatz** geteilt werden:

Ist x_1 eine Nullstelle der ganzrationalen Funktion f, dann ist f stets teilbar durch $(x - x_1)$ ohne Rest.

Die Polynomdivision ergibt $\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x - 1\right) : (x + 1) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$.

Der verbleibende, quadratische Ausdruck $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$ kann mithilfe der Mitternachtsformel (die Lösungen sind hier $x_2 = -1$ und $x_3 = 3$ zerlegt werden in $\frac{1}{3}(x + 1)(x - 3)$.

Die gesamte Zerlegung von f in sogenannte Linearfaktoren lautet

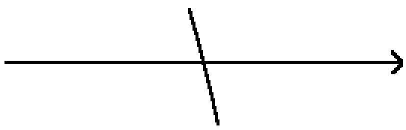
$$f(x) = \frac{1}{3}(x - 3)(x + 1)^2$$

Die Nullstellen von f sind somit

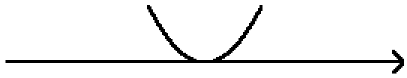
$$\begin{array}{ll} x_1 = 3 & \text{einfach} \\ x_2 = -1 & \text{zweifach} \end{array}$$

Die Hochzahl der jeweiligen Linearfaktoren gibt die **Vielfachheit** der zugehörigen Nullstellen an.

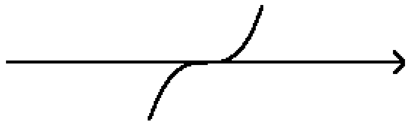
Nullstellen – Übersicht:



einfache Nullstelle
Vorzeichenwechsel von f
Graph schneidet x- Achse



zweifache Nullstelle
kein Vorzeichenwechsel
G_f berührt x-Achse



dreifache Nullstelle
VZW
G_f berührt und schneidet x-Achse

Der Graph G_f hat dem entsprechend folgende Form: