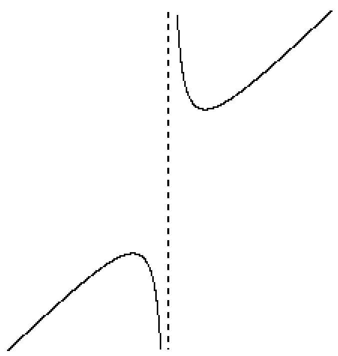
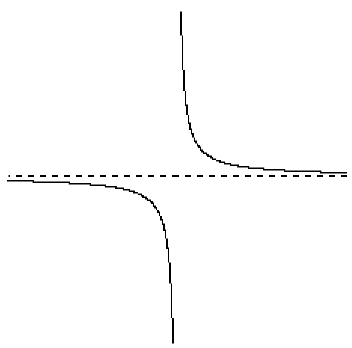
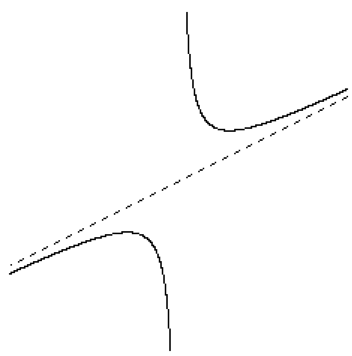
Gebrochen-rationale Funktionen • Asymptoten

Vereinbarung: z Zählergrad
n Nennergrad

Eine **Asymptote** ist eine Gerade, der sich ein Funktionsgraph annähert.

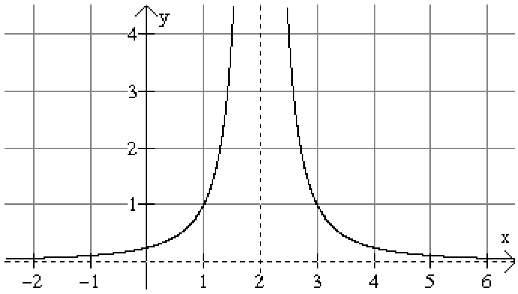
Bei gebrochen-rationalen Funktionen unterscheiden wir:

Senkrechte Asymptote	**Waagrechte Asymptote**	**Schräge Asymptote**
Eine senkrechte Asymptote kommt immer bei einer **Polstelle** vor.	Wenn $z \leq n$, dann existiert eine waagrechte Asymptote. $z = n$: Parallele zur x-Achse | $z < n$: x-Achse ist Asymptote selbst, also $y = 0$. Im Fall $z = n$ erhält man die Gleichung der waagrechten Asymptote durch Vergleich der Leitkoeffizienten, Verhalten im Unendlichen oder Polynomdivision.	Liegt vor, wenn $z = n + 1$. Ganzrationaler Anteil bei der **Polynomdivision**!
		

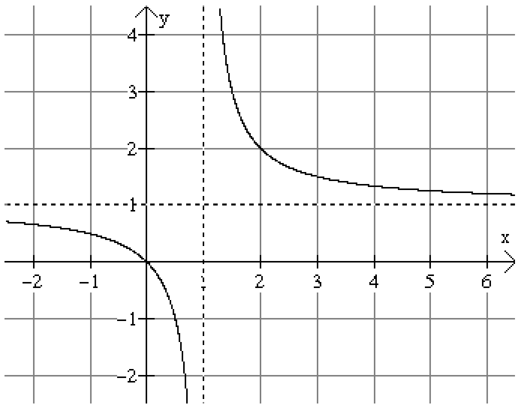
Waagrechte und schräge Asymptoten können durchaus vom Funktionsgraphen einfach oder auch mehrfach geschnitten werden.

Beispiele für Asymptoten:

1. $f_1(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ besitzt einen Pol 2. Ordnung bei $x_0 = 2$ ohne Vorzeichenwechsel, d.h. eine senkrechte Asymptote bei $x = 2$ sowie eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$ $(z < n)$.



2. $f_2(x) = \frac{x}{x-1}$ Polstelle 1. Ordnung bei $x_0 = 1$ mit Vorzeichenwechsel, also eine senkrechte Asymptote mit $x = 1$ sowie eine waagrechte Asymptote bei $y = 1$ (Polynomdivision!) $(z = n)$.



3. $f_3(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{2x^2-2} = \frac{(x^2+1)(x+1)}{2(x+1)(x-1)}$ ergibt $f_3(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{2x+2}{2x^2-2}$ nach Polynomdivision. Senkrechte Asymptote bei $x = 1$, Schräge Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Bei $x = -1$ liegt eine hebbare Definitionslücke vor.