Kombinatorik

Variation ohne Wiederholung

Wie viele Möglichkeiten gibt es in der Klasse FS11, drei der 24 Schüler für den Reinigungsdienst auszuwählen?

$$24 \cdot 23 \cdot 22 = 12\,144$$

Allgemeine Regel anhand des Urnenmodells: k-maligen Ziehen aus einer Urne mit n Kugeln ohne Zurücklegen. Es existieren

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Möglichkeiten.

Variation mit Wiederholung

Wie viele Möglichkeiten existieren, ein Wort aus vier der 26 Buchstaben zu bilden? Die Buchstaben dürfen sich wiederholen und das Wort muss nicht sinnvoll sein.

$$26^4 = 456\,976$$

Im Urnenmodell: Aus einer Urne mit n unterschiedlichen Kugeln werden k Kugeln mit Berücksichtigung er Reihenfolge gezogen. Es existieren

$$n^k$$

verschiedene Ergebnisse.

Permutation ohne Wiederholung

Wie hoch ist die Anzahl der Möglichkeiten, fünf verschiedenfarbige Gummibärchen anzuordnen?

$$5! \coloneqq 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Aus der Urne mit n verschiedenen Kugeln werden alle Kugeln gezogen mit Berücksichtigung der Reihenfolge. Dabei existieren

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Möglichkeiten. Der Ausdruck n! wird dabei **n Fakultät** genannt.

Permutation mit Wiederholung

Gesucht ist die Anzahl der Anagramme des Worts „MISSISSIPPI“, also ein durch Umstellung der Buchstaben neu entstandenes, nicht unbedingt sinnvolles Wort. Das Wort besteht aus elf Buchstaben, von denen einige mehrfach vorkommen: einmal M, vier I, vier S und doppeltem P. Die Anzahl der verschiedenen Anordnungen berechnet sich mit der Formel

$$\frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34\,650$$

In der Modellurne liegen n Kugeln, die sich in gleiche Gruppen aufteilen. k_1 von Sorte 1, k_2 von Sorte 2 usw. Insgesamt gibt es $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots}$ verschiedene Reihenfolgen.

Kombination ohne Wiederholung	**Kombination mit Wiederholung**
Auf wie viele verschiedene Arten kann man zwei gleiche Äpfel und drei identische Birnen anordnen? $$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$$ Es wird k-mal aus einer Urne mit n Kugeln gezogen ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Dabei gibt es $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$ Möglichkeiten („n über k“ bzw. „k aus n“). Der Begriff $\binom{n}{k}$ heißt **Binomialkoeffizient.**	Sie kaufen sich drei 3 Kugeln Eis und können dabei aus sieben verschiedenen Sorten wählen. Jede Sorte darf mehrfach gewählt werden (z.B. dreimal Schokolade). Die Reihenfolge der Kugeln spielt keine Rolle. Die Anzahl der Möglichkeiten ergibt $$\binom{7+3-1}{3} = \binom{9}{3} = 84$$ Sie haben eine Urne mit n verschiedenen Kugeln und möchten k Kugeln ziehen, wobei jede gezogene Kugel nach dem Ziehen wieder zurückgelegt wird. So kann jede Kugel mehrfach gezogen werden, und die Reihenfolge spielt keine Rolle. Die Anzahl der Möglichkeiten berechnen Sie mit $$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!}$$