Logarithmus

Eine Bakterienkultur verdoppelt durch Zellteilung jede Stunde ihre Anzahl. Wie lange dauert es, bis aus einer Million Bakterien fünf Milliarden geworden sind?

Ist x die Anzahl an Stunden, dann ist die folgende Gleichung zu lösen:

$$1\,000\,000 \cdot 2^x = 5\,000\,000\,000 \text{ bzw.}$$

$$2^x = 5\,000$$

> Die Lösung der Gleichung $b^x = a$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ bezeichnen wir mit $x = \log_b(a)$ und nennen sie **Logarithmus von a zur Basis b**.

Für die Bakterienkultur erhalten wir mit dem Taschenrechner

$$x = \log_2(5\,000) \approx 12{,}29.$$

Es dauert also etwas mehr als zwölf Stunden, bis fünf Milliarden Bakterien entstanden sind.

Weitere Beispiele zum Logarithmus

- $10^x = 1\,000 \Rightarrow x = \log_{10}(1\,000) = 3$
- $3^x = 7 \Rightarrow x = \log_3(7) \approx 1{,}77$, in der Regel sind Logarithmen irrationale Zahlen.
- $7^x = -4$ ist nicht möglich, da der Wert a positiv sein muss. Deshalb gibt der Taschenrechner hier auch eine Fehlermeldung aus.

Besondere Logarithmen

- Der **Zehnerlogarithmus** ist der Logarithmus zur Basis 10 wird häufig mit den Symbolen $\log = \lg = \log_{10}$ bezeichnet
- $\mathrm{ld} = \mathrm{lb} = \log_2$ sind alte Schreibweisen für den **Zweierlogarithmus**
- Der **natürliche Logarithmus** (ln) hat auf die Eulersche Zahl $e \approx 2{,}72$ als Basis

Rechengesetze

1. $\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$
2. $\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$
3. $\log_b(u^z) = z \cdot \log_b(u)$
4. $\log_c(a) = \frac{\log_b(a)}{\log_b(c)}$ (Basisumrechung). Dabei ist $b \in \mathbb{R}^+$ eine beliebige neue Basis. Diese ist sinnvoll, wenn Sie nur den Zehnerlogarithmus auf Ihrem Taschenrechner haben.