Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

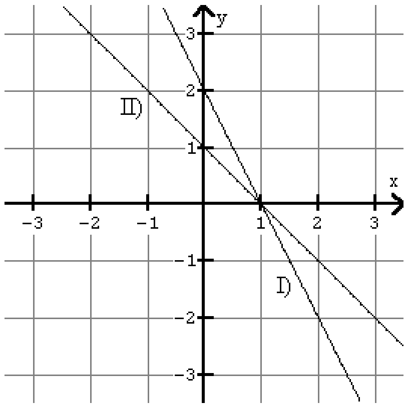
Bei der Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen unterscheiden wir folgende Möglichkeiten. Es wurden einfache Beispiele mit jeweils zwei Unbekannten mit ihrer graphischen Veranschaulichung gewählt.

Eine eindeutige Lösung

$$\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & 2x & +y & = & 2 \\ \text{II)} & x & +y & = & 1 \end{array}$$

I) − II) $x = 1$
und damit $y = 0$

$L = \{(1; 0)\}$



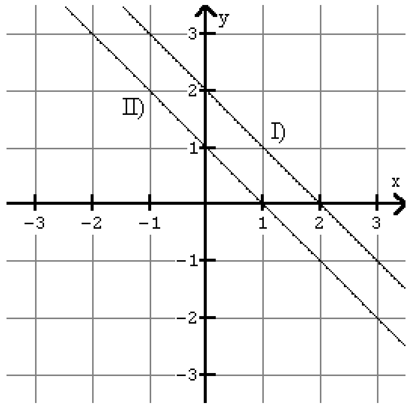
Die Geraden schneiden sich in einem Punkt

Keine Lösung

$$\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & 3x & +3y & = & 6 \\ \text{II)} & -2x & -2y & = & -2 \end{array}$$

$2 \cdot$ I) + $3 \cdot$ II) $0 = 6$
Widerspruch!

$L = \emptyset$



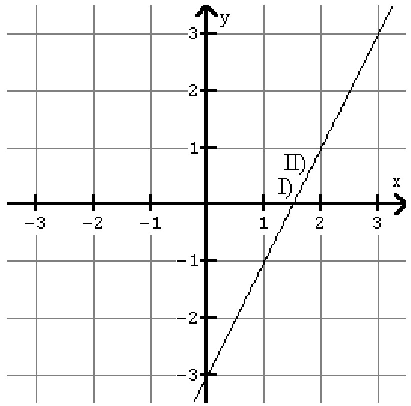
Die Geraden sind echt parallel

Unendlich viele Lösungen

$$\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & 4x & -2y & = & 6 \\ \text{II)} & -8x & +4y & = & -12 \end{array}$$

$2 \cdot$ I) + II) $0 = 0$
Allgemein gültige Aussage

$L = \{(x; y) | y = 2x - 3\}$



Beide Geraden sind identisch

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems entspricht den Punkten, die auf beiden Geraden gleichzeitig liegen.

Bei drei oder mehreren Unbekannten ist eine graphische Darstellung nur noch schwer möglich. Eine gute Möglichkeit ist hier die Verwendung des Gauß-Verfahrens. Nachdem das Gleichungssystem in Dreiecksform gebracht worden ist, ist die unterste Zeile ausschlaggebend für die Anzahl der Lösungen.

$$\begin{array}{rccccc} \mathrm{I)} & 5x & +7y & +3z & = & 5 \\ \mathrm{II)} & & 2y & +z & = & 6 \\ \mathrm{III)} & & & 2z & = & 4 \end{array}$$

Ist die unterste Zeile des Gleichungssystems eindeutig auflösbar (hier ist $z = 2$), dann existiert genau eine Lösung.

$$\begin{array}{rccccc} \mathrm{I)} & 3x & +2y & -z & = & 2 \\ \mathrm{II)} & & -2y & +z & = & 1 \\ \mathrm{III)} & & & 0 & = & 1 \end{array}$$

Taucht ein Widerspruch auf, dann existiert keine Lösung.

$$\begin{array}{rccccc} \mathrm{I)} & -4x & +y & -2z & = & 7 \\ \mathrm{II)} & & 2y & -z & = & 3 \\ \mathrm{III)} & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Ergibt die letzte Zeile eine komplette Nullzeile, dann kann man von unendlich vielen Lösungen ausgehen.

Damit ein **überbestimmtes lineares Gleichungssystem** eindeutig lösbar sein kann, müssen die überzähligen Zeilen durch das Gauß-Verfahren allesamt wegfallen, also Nullzeilen ergeben.

Ein **unterbestimmtes Gleichungssystem** ist niemals eindeutig lösbar. Es ist dann unlösbar, wenn ein Widerspruch auftritt, ansonsten existieren auch hier unendlich viele Lösungen.