Partielle Integration

Die **partielle Integration** ist eine Methode, manche Integrale von Produkten auf einen einfacheren Ausdruck zu reduzieren. Es gilt:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Beispiele:

1. $\int x \cdot e^x\, dx$

   Hier ist es sinnvoll, $u(x) = x$ und $v'(x) = e^x$ zu setzen.
   Dann ergibt sich $u'(x) = 1$ sowie $v(x) = e^x$.

   $\int x \cdot e^x\, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx$
   $= x \cdot e^x - e^x + c;\, c \in \mathbb{R}.$
   Das verbleibende Integral ist sehr leicht zu lösen.

   Hinweis: Nicht immer wird das Integral bei der partiellen Integration leichter. Verwendet man in diesem Beispiel die umgekehrten Bezeichnungen $u(x) = e^x$ und $v'(x) = x$, dann wird der Ausdruck komplizierter anstatt einfacher.

2. $\int \ln(x)\, dx$

   Hier verwenden wir einen kleinen Trick, indem wir $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$ schreiben und bestimmen:

   $u(x) = \ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$
   $v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$

   Einsetzen in die Formel ergibt $\int \ln(x)\, dx = \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx$
   $x \cdot \ln(x) - \int 1\, dx$
   $x \cdot \ln(x) - x + c;\, c \in \mathbb{R}.$

3. $\int x \cdot \ln(x)\, dx$

   $u(x) = \ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$
   $v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}x^2$

   $\int x \cdot \ln(x)\, dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx$
   $= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2}x\, dx$
   $= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + c;\, c \in \mathbb{R}.$

4. Bei manchen Integralen kann es vorkommen, dass zweifach oder öfter partiell integriert werden muss, um zu einem Ergebnis zu kommen:

$$\int x^2 \cdot e^{1-x}\,dx$$

$$\begin{aligned}
&\int \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{1-x}}_{v'(x)}\,dx = x^2 \cdot (-e^{1-x}) - \int 2x \cdot (-e^{1-x})\,dx \\
&= -x^2 \cdot e^{1-x} + \int \underbrace{2x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{1-x}}_{v'(x)}\,dx \\
&= -x^2 \cdot e^{1-x} + 2x \cdot (-e^{1-x}) - \int 2 \cdot (-e^{1-x})\,dx \\
&= -x^2 \cdot e^{1-x} - 2x \cdot e^{1-x} + \int 2 \cdot e^{1-x}\,dx \\
&= -x^2 \cdot e^{1-x} - 2x \cdot e^{1-x} + 2(-e^{1-x}) + c \\
&= -(x^2 + 2x \cdot e^{1-x} + 2) \cdot e^{1-x} + c.
\end{aligned}$$

5. $\int x \cdot \sin(x)\,dx = -x \cdot \cos(x) - \sin(x) + c.$

6. Bei einigen Integralen kann es passieren, dass man nach zweimaliger partieller Integration wieder auf den ursprünglichen Ausdruck kommt.

$$\begin{aligned}
&\int \underbrace{e^x}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{u(x)}\,dx \\
&\int \underbrace{e^x}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{u(x)}\,dx = e^x \cdot \sin(x) - \int \underbrace{e^x}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{u(x)}\,dx \\
&= e^x \cdot \sin(x) - \int \underbrace{e^x}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{u(x)}\,dx \\
&= e^x \cdot \sin(x) - \left(e^x \cdot \cos(x) - \int -e^x \cdot \sin(x)\,dx\right) \\
&= e^x \cdot \sin(x) - \left(e^x \cdot \cos(x) - \int -e^x \cdot \sin(x)\,dx\right) \\
&= e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot \sin(x)\,dx
\end{aligned}$$

Nachdem man wieder beim ursprünglichen Integral angekommen ist, kann man die Gleichung

$$\int e^x \cdot \sin(x)\,dx = e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot \sin(x)\,dx$$

umstellen, indem man das rechte Integral addiert, um es nach links zu bringen:

$$2\int e^x \cdot \sin(x)\,dx = e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x).$$

Teilen der Gleichung durch 2 bringt uns zum Ergebnis

$$\int e^x \cdot \sin(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x)\right) + c.$$