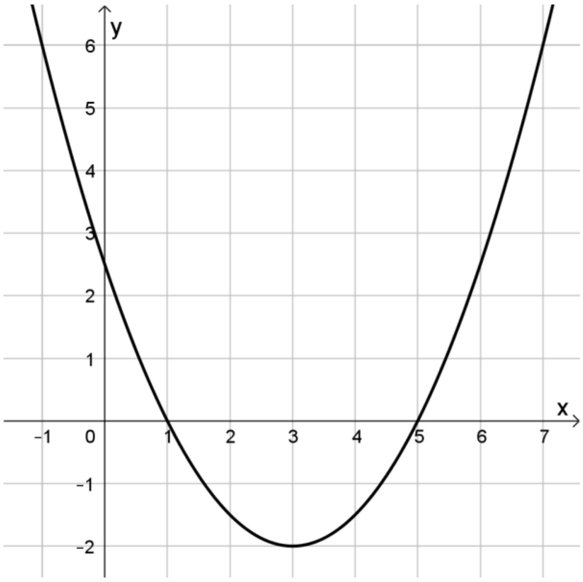
Quadratische Funktionen

Eine Funktion, deren Funktionsgleichung in der Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ geschrieben werden kann, heißt **quadratische Funktion**.
Ihr Graph ist immer eine **Parabel.**

Beispiel: Graph von $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$; hier ist $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$ und $c = \frac{5}{2}$.



Wertetabelle von f:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	6	2,5	0	$-1{,}5$	-2	$-1{,}5$	0	2,5	10,5

Eigenschaften der quadratischen Funktion

- Der Koeffizient a vor dem x^2 heißt **Formfaktor** bzw. **Öffnungsfaktor** der Parabel.
  Bei $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet, bei $a < 0$ nach unten.
  Ist $|a| > 1$, dann wird die Parabel schmaler, d.h. in y-Richtung gestreckt
  Für $|a| = 1$ handelt es sich um eine **Normalparabel**,
  und bei $|a| < 1$ wird die Parabel wie im Beispiel breiter in x-Richtung gestreckt.
  Die Parabel in unserem Beispiel besitzt den Öffnungsfaktor $a = \frac{1}{2}$, die Parabel ist hier auf die Hälfte gestaucht im Gegensatz zur Normalparabel.

- Die Konstante c, im Beispiel ist $c = \frac{5}{2}$, gibt den **y-Achsenabschnitt** an. Das ist der Wert, an dem die y-Achse geschnitten wird.

- Die **Nullstellen** der Funktion sind die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$, also die Stellen $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Im Beispiel ergeben sich hier die Werte $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$.
  Es ist auch möglich, dass nur eine Nullstelle existiert (die x-Achse wird dann vom Funktionsgraphen berührt) oder gar keine.

- Jede Parabel besitzt einen **Scheitelpunkt**. Das ist der tiefste (bei nach unten geöffneter Parabel der höchste) Punkt des Graphen. Er besitzt die Koordinaten $x_S = \frac{-b}{2a}$ und $y_S = f(x_S) = \frac{-b^2}{4a} + c$. Im Beispiel ist $S(3; -2)$.

- Die Symmetrieachse jeder Parabel ist die Parallele zur y-Achse durch den Scheitelpunkt.

- Weitere Darstellungsformen der quadratischen Funktion sind die **Scheitelform** sowie gegebenenfalls die **Linearfaktorzerlegung/Nullstellenform:**

Scheitelform

$$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S,$$

im Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 3)^2 - 2$$

Nullstellenform

$$f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2),$$

im Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 1)(x - 5)$$

Die Nullstellenform existiert nur, wenn mindestens eine Nullstelle vorliegt.