Quadratwurzeln
Info

Der Ausdruck $\sqrt{a}$, die Quadratwurzel (kurz Wurzel) aus a, ist für $a \epsilon \mathbb{R}_0^+$ die nicht negative Lösung der Gleichung $x^2 = a$. In Worten ausgedrückt ist $\sqrt{a}$ die Zahl, die mit sich selbst multipliziert, also quadriert, a ergibt.
Ist a eine Quadratzahl, so ist $\sqrt{a}$ eine natürliche Zahl, z.B. ist $\sqrt{16} = 4$. Man kann zeigen, dass in allen anderen Fällen $\sqrt{a}$ eine **irrationale Zahl** ist, also nicht als Bruch geschrieben werden kann und deshalb auch kein Element der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist. Die Kommadarstellung einer solchen Zahl ist dann stets unendlich lang. $\sqrt{3} \approx 1{,}732\ldots$ kann wie alle anderen solchen Wurzeln nur gerundet angegeben werden. Die Wurzel aus einer negativen Zahl existiert bei reellen Zahlen nicht.
Eine Möglichkeit zur näherungsweisen Darstellung von Quadratwurzeln ist die **Intervallschachtelung**.

Beispiele:

- $\sqrt{4} = 2$
- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$
- $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ ist eine irrationale Zahl und kann damit nur gerundet angegeben werden
- $\sqrt{-1}$ existiert bei reellen Zahlen nicht
- Allgemein ist $\sqrt{a^2} = |a|$ für jedes $a \in \mathbb{R}$

Vorkommen von Quadratwurzeln in der Mathematik:

- Die quadratische Gleichung $x^2 - x - 1$ hat beispielsweise die beiden Lösungen $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ und $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- Im Satz von Pythagoras ist zum Beispiel die Länge der Hypotenuse $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, wenn a und b die Längen der Katheten sind.

- Abstand von zwei Punkten in der Ebene und im Raum, so besitzt der Abstand von $P(3; 2; 0)$ und $Q(1; -2; 3)$ den Wert
  $\sqrt{(1-3)^2 + (-2-2)^2 + (3-0)^2}$
  $= \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (3)^2}$
  $= \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}$.

- Die Länge eines Vektors in der Ebene oder im Raum wird ähnlich wie der Abstand zweier Punkte berechnet.