



## Quadratwurzeln

Der Ausdruck  $\sqrt{a}$ , die **Quadratwurzel** (kurz **Wurzel**) aus  $a$ , ist für  $a \in \mathbb{R}_0^+$  die nicht negative Lösung der Gleichung  $x^2 = a$ . In Worten ausgedrückt ist  $\sqrt{a}$  die Zahl, die mit sich selbst multipliziert, also quadriert,  $a$  ergibt.

Ist  $a$  eine Quadratzahl, so ist  $\sqrt{a}$  eine natürliche Zahl, z.B. ist  $\sqrt{16} = 4$ . In fast allen anderen Fällen ist  $\sqrt{a}$  eine **irrationale Zahl**, kann also nicht als Bruch geschrieben werden und ist deshalb auch kein Element der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ . Die Kommdarstellung einer solchen Zahl ist dann stets unendlich lang.  $\sqrt{3} \approx 1,732 \dots$  kann wie alle anderen solchen Wurzeln daher nur gerundet angegeben werden. Die Wurzel aus einer negativen Zahl existiert bei reellen Zahlen nicht.

Beispiele:

- $\sqrt{4} = 2$ , weil  $2^2 = 4$
- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{0,16} = 0,4$
- $\sqrt{2} \approx 1,41$  ist eine irrationale Zahl und kann damit nur gerundet angegeben werden
- $\sqrt{-1}$  existiert bei reellen Zahlen nicht
- Allgemein gilt  $\sqrt{a^2} = |a|$  für jedes  $a \in \mathbb{R}$

### Vorkommen von Quadratwurzeln in der Mathematik:

- Die quadratische Gleichung  $x^2 - x - 1$  hat beispielsweise die beiden Lösungen  $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  und  $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .
- Im Satz von Pythagoras ist zum Beispiel die Länge der Hypotenuse  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , wenn  $a$  und  $b$  die Längen der Katheten sind.
- Abstand von zwei Punkten in der Ebene und im Raum, so besitzt der Abstand von  $P(3; 2; 0)$  und  $Q(1; -2; 3)$  den Wert
$$\begin{aligned} & \sqrt{(1-3)^2 + (-2-2)^2 + (3-0)^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (3)^2} \\ &= \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}. \end{aligned}$$
- Die Länge eines Vektors in der Ebene oder im Raum wird ähnlich wie der Abstand zweier Punkte berechnet.
- Auch in der Trigonometrie findet man Wurzeln, beispielsweise ist  $\sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ,  $\cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  oder  $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$ .