Das Verfahren von Gauß
Info

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit drei oder mehr Unbekannten wird in der Regel mit dem **Gauß-Verfahren** gelöst. Ziel dieses Verfahrens ist es, durch geeignete Umformungen das System in eine Stufenform zu bringen.

Jede Zeile kann mit einer beliebigen Konstanten (außer Null) multipliziert werden, ohne dass sich die Lösung des LGS ändert. Außerdem können auch Zeilen addiert bzw. subtrahiert werden.

Beispiel mit drei Unbekannten:

$$\begin{array}{lrrrcrl}
\text{I)} & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 2 & |\cdot 3 \\
\text{II)} & 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & -2 & |\cdot 2 \\
\text{III)} & -x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = & 6 & |\cdot 6
\end{array}$$

Die Zeilen werden so multipliziert, dass die Unbekannten der ersten Spalte den gleichen Koeffizienten (ggf. mit negativem Vorzeichen) besitzen.

$$\begin{array}{lrrrcrl}
\text{I)} & 6x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = & 6 & \\
\text{II)} & 6x_1 & -6x_2 & +4x_3 & = & -4 & |\ \text{II)} - \text{I)} \\
\text{III)} & -6x_1 & +12x_2 & -18x_3 & = & 36 & |\ \text{III)} + \text{I)}
\end{array}$$

Die erste Zeile wird von der zweiten abgezogen, zur dritten wird sie addiert, damit jeweils x_1 wegfällt.

$$\begin{array}{lrrrcrl}
\text{I)} & 6x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = & 6 & \\
\text{II)} & & -3x_2 & +x_3 & = & -10 & \\
\text{III)} & & 9x_2 & -15x_3 & = & 42 & |\ \text{III)} + 3\cdot\text{II)}
\end{array}$$

Nun muss zu Zeile III) das dreifache von II) addiert werden, damit hier auch x_2 eliminiert wird.

$$\begin{array}{lrrrcrl}
\text{I)} & 6x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = & 6 & \\
\text{II)} & & -3x_2 & +x_3 & = & -10 & \\
\text{III)} & & & -12x_3 & = & 12 & \Rightarrow x_3 = -1
\end{array}$$

Das System befindet sich hier in der Stufenform, aus der von unten her die Lösungen abgelesen werden können.

x_3 in II) $-3x_2 - 1 = -10 \Rightarrow x_2 = 3$

x_2 erhält man durch Einsetzen von x_3 in Gleichung II)

x_2, x_3 in I) $6x_1 - 9 - 3 = 2 \Rightarrow x_1 = 3$

x_1 ergibt sich nun aus der oberen Gleichung.

$L = \{(3; 3; -1)\}$

Nicht vergessen: Angabe des Zahlentripels als Lösungsmenge.