Allgemeine Exponentialfunktion • Anwendungen
Übung

1. Gebrauchtwagen

Ein PKW verliert ab Kaufdatum jährlich ein Fünftel seines Werts. Er besitzt ein Jahr nach dem Kauf noch einen Gebrauchtwert von 32 000 €. Auf die Verwendung von Maßeinheiten kann bei dieser Aufgabe verzichtet werden. Runden Sie alle Ergebnisse gegebenenfalls auf Eurocent.

a) Berechnen Sie den Neuwert des Wagens. Wie viele € hat der Wagen demnach im ersten Jahr an Wert verloren?

b) Übertragen Sie die folgende Tabelle in Ihre Aufzeichnungen und vervollständigen Sie diese.

Alter t in a	0	1	2	3	4	8
Wert W in €		32 000				

c) Begründen Sie mit Worten, dass der Zusammenhang zwischen dem Alter t (in Jahren) und dem Wert W des PKWs (in €) durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann.

d) Bestimmen Sie den Funktionsterm W(t) dieser Exponentialfunktion.

e) Ermitteln Sie mit Hilfe der Funktion W(t) den Wert des Wagens bei einem Alter von 6 bzw. 9 Jahren. Berechnen Sie auch das Alter, bei dem der Wert des PKWs noch rund 3 400,- € beträgt.

f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion W(t) für die ersten zwölf Jahre in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Verwenden Sie dazu Ihre bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie gegebenenfalls weitere Funktionswerte.

g) Die Halbwertszeit t_H ist die Zeitdauer, nach der sich jeweils der Wert des PKWs halbiert. Schätzen Sie t_H aus dem Graphen ab und berechnen Sie diese anschließend.

h) Ab einem Alter von acht Jahren beginnen sich oft Reparaturen zu häufen. Wie viel Geld müssen Sie ausgehend vom Kauf Ihres neuen PKWs monatlich sparen, um sich acht Jahre später nach dessen Verkauf einen anderen Neuwagen für 50 000 € leisten zu können? Vernachlässigen Sie zur Vereinfachung bei der Rechnung erhaltene Zinsen auf Ihre Ersparnisse.

2. Bierschaumzerfall

Die Höhe h der Schaumkrone (in mm) eines alkoholhaltigen Gerstenkaltgetränks kann in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten) durch eine Exponentialfunktion

$$h(t) = a \cdot b^t$$

dargestellt werden. Bei den Rechnungen kann auf die Angabe von Einheiten verzichtet werden.

a) Während die Höhe des Schaums eine Minute nach dem Einschenken 27 mm beträgt, ist sie weitere zwei Minuten später bereits auf 5,5 mm zusammengefallen. Berechnen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ und runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. [Lösung: $a = 60$ und $b = 0{,}45$]

b) Bestimmen sie die Höhe des Bierschaums zwei Minuten nach dem Einschenken sowie die Zeit, innerhalb der die Höhe des Schaums nur noch 3 mm beträgt.

c) Welche Höhe nimmt die Schaumkrone nach sehr langer Zeit an?

d) Skizzieren Sie den Graphen von h(t) für die ersten sechs Minuten nach Einschenken des Biers. Verwenden Sie dazu Ihre bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie gegebenenfalls weitere Funktionswerte.

e) Die Halbwertszeit t_H ist die Zeitdauer, nach der sich jeweils die Höhe des Bierschaums halbiert. Berechnen Sie t_H auf zwei Nachkommastellen genau.

f) Wie lange würde der komplette Zerfall des Schaums dauern, wenn der Prozess von Beginn an linear anstatt exponentiell erfolgen würde und von den ursprünglichen 60 mm Schaumkrone nach der ersten Minute ebenso noch 27 mm übrig wären?

3. Bevölkerungswachstum

Zu Beginn des Jahres 2000 betrug die Bevölkerungszahl in der afrikanischen Nation Niger rund 11,51 Millionen Menschen. Die durchschnittliche jährliche Zunahme bis ins Jahr 2050 wird mit 3,08 % prognostiziert.

a) Begründen Sie, dass die Bevölkerungsentwicklung von Niger durch die Exponentialfunktion $B(t) = 11{,}51 \cdot 1{,}0308^t$ beschrieben werden kann. Die Variable t soll dabei die Zeit in Jahren seit Beginn 2000 darstellen.

b) Berechnen Sie die voraussichtliche Bevölkerungszahl im Jahr 2030 sowie das Jahr, zu dem erwartungsgemäß 40 Millionen Menschen in Niger leben werden.

c) Bei der Verdoppelungszeit t_D handelt es sich um die Zeit, in der sich die ursprünglich vorhandene Anzahl an Menschen verdoppelt. Ermitteln Sie t_D für die nigerianische Bevölkerung.

d) Skizzieren Sie den Graphen von B(t) für die Jahre 2000 bis einschließlich 2050. Verwenden Sie dazu Ihre bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie weitere geeignete Funktionswerte.

e) Entnehmen Sie dem Graphen das durchschnittliche jährliche Bevölkerungswachstum zwischen 2000 und 2050.

4. Zinseszins

Hannes hat einen Geldbetrag geerbt und legt diesen zu einem festen Zinssatz an. Die erhaltenen Zinsen werden nicht abgehoben, sondern im folgenden Jahr mit demselben Zinssatz mitverzinst. Nach zwei Jahren Jahr besitzt er ein Guthaben von 91 936 €, ein weiteres Jahr später sind es bereits 95 613,44 €. Auf die Verwendung von Einheiten kann in dieser Aufgabe verzichtet werden.

a) Bestimmen Sie einen Funktionsterm $G(t)$, der sein Guthaben in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) darstellt.

b) Geben Sie seinen ursprünglich angelegten Geldbetrag an sowie den Zinssatz, den er jährlich erhält.

c) Zwölf Jahre, nachdem er sein Geld angelegt hat, möchte er ein Apartment für 130 000 € kaufen. Prüfen Sie, ob sein verzinstes Erbe dafür ausreicht.

d) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich sein Erbe bei gleichbleibenden Konditionen verdreifacht hätte.

Allgemeine Exponentialfunktion • Anwendungen
Lösung

1. Gebrauchtwagen

a) Der Neuwert des Wagens beträgt $\frac{32\,000}{0{,}8} = 40\,000$ (€). Der Wagen hat im ersten Jahr 8 000 € an Wert verloren.

b)

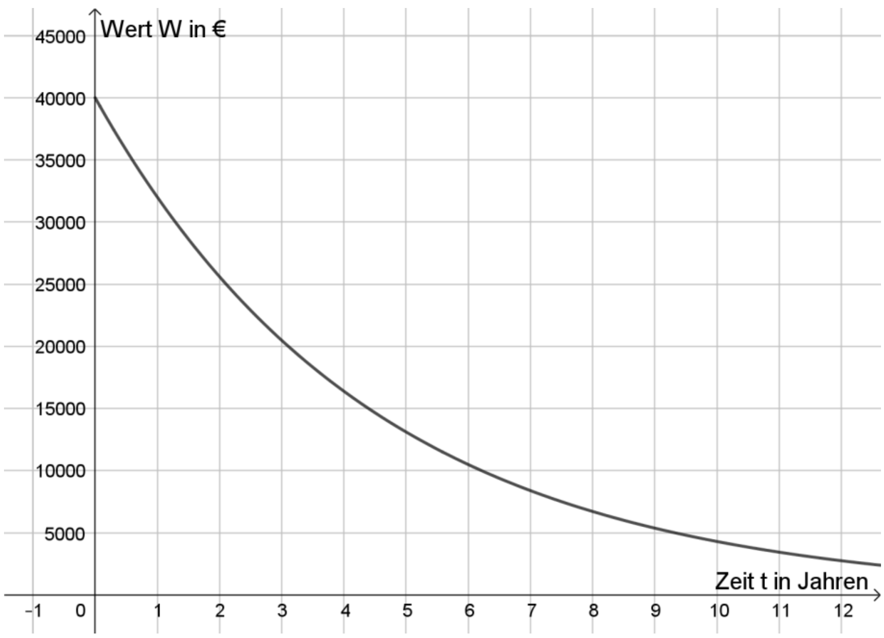
Alter t in a	0	1	2	3	4	8
Wert W in €	40 000	32 000	25 600	20 480	16 384	6 710,89

c) Der Wert des Wagens nimmt jedes Jahr um denselben Anteil (20%) ab. (Hinweis: Der Wachstumsfaktor ergibt sich aus dem konstanten Quotienten zweier aufeinander folgender Werte.)

d) Der allgemeine Funktionsterm lautet $W(t) = a \cdot b^t$.
Startwert $W(0) = a = 40\,000$.
Bei 20% jährlichem Verlust erhalten wir $b = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$
Damit ist $W(t) = 40\,000 \cdot 0{,}8^t$

e) $W(6) = 10\,485{,}76$
$W(9) \approx 5\,368{,}71$
Die Gleichung $40\,000 \cdot 0{,}8^t = 3\,400$ besitzt die Lösung $t \approx 11{,}05$, d.h. nach rund 11 Jahren ist der PKW noch ca. 3 400 € wert.

f) $W(12) \approx 2748{,}78$



g) $a \cdot 0{,}8^t = 0{,}5 \cdot a$, der Startwert ist hier egal, da es sich stets herauskürzt.
$0{,}8^t = 0{,}5$
$t_H = \log_{0,8}(0{,}5) \approx 3{,}11$; die Wertehalbierung dauert demnach etwas mehr als drei Jahre.

h) Gebrauchtwert des alten Wagens ist $W(8) \approx 6\,710{,}89$ (€). Es müssen insgesamt noch 43 289,11 € angespart werden. Diese verteilen sich gleichmäßig auf acht Jahre zu je zwölf Monaten. Die monatliche Sparrate sollte deswegen 450,93 € betragen.

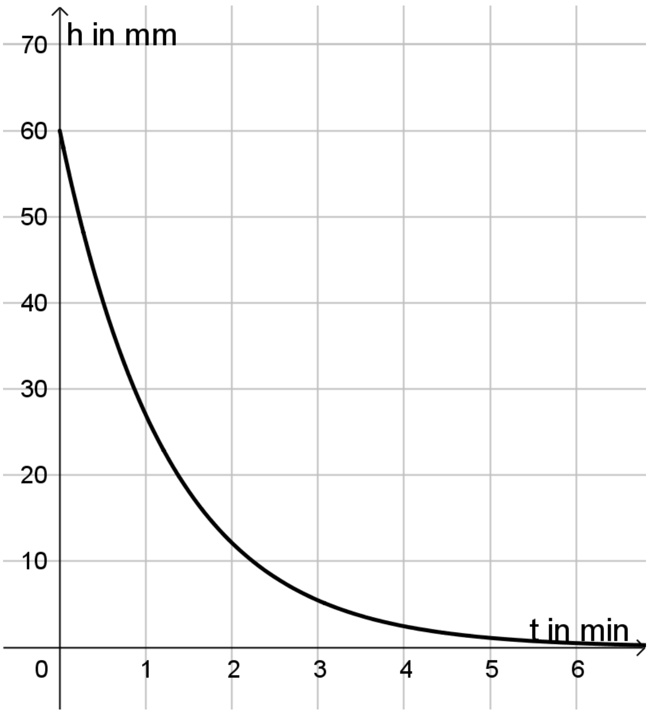
2. Bierschaumzerfall

a) Es ergeben sich die Gleichungen
I) $h(1) = a \cdot b^1 = 27$
II) $h(3) = a \cdot b^3 = 5{,}5$
I) kann beispielsweise aufgelöst werden zu $a = \frac{27}{b}$ und eingesetzt werden in
II) $\frac{27}{b} \cdot b^3 = 5{,}5$ bzw. $27 \cdot b^2 = 5{,}5$. Damit ist $b = \sqrt{\frac{5{,}5}{27}} \approx 0{,}45$.
$a = \frac{27}{0{,}45} = 60$.

b) $h(2) = 60 \cdot 0{,}45^2 = 12{,}15$ (mm)
$h(t) = 3 \Leftrightarrow 60 \cdot 0{,}45^t = 3$
$0{,}45^t = 0{,}05$
$t = \log_{0{,}45} 0{,}05 \approx 3{,}75$ (min)

c) Nach sehr langer Zeit nähert sich die Höhe der Krone dem Wert Null an.

d) (Es ist $h(6) \approx 0{,}50$ mm)



e) Die Gleichung $60 \cdot 0{,}45^t = 0{,}5 \cdot 60$ besitzt die Lösung
$t = \log_{0{,}45}(0{,}5) \approx 0{,}87$ (min) ≈ 52 (s)

f) Würde der Prozess linear erfolgen, wäre der zugehörige Funktionsterm
$h_l(t) = a \cdot t + b$.
Mit den Funktionswerten $h(0) = 60$ und $h(1) = 27$ ergibt sich $h_l(t) = -33t + 60$.

Diese Funktion besitzt die Nullstelle $t_1 = \frac{60}{33} \approx 1{,}82$.
Der Schaum wäre nach weniger als zwei Minuten vollständig zerfallen.

3. Bevölkerungswachstum

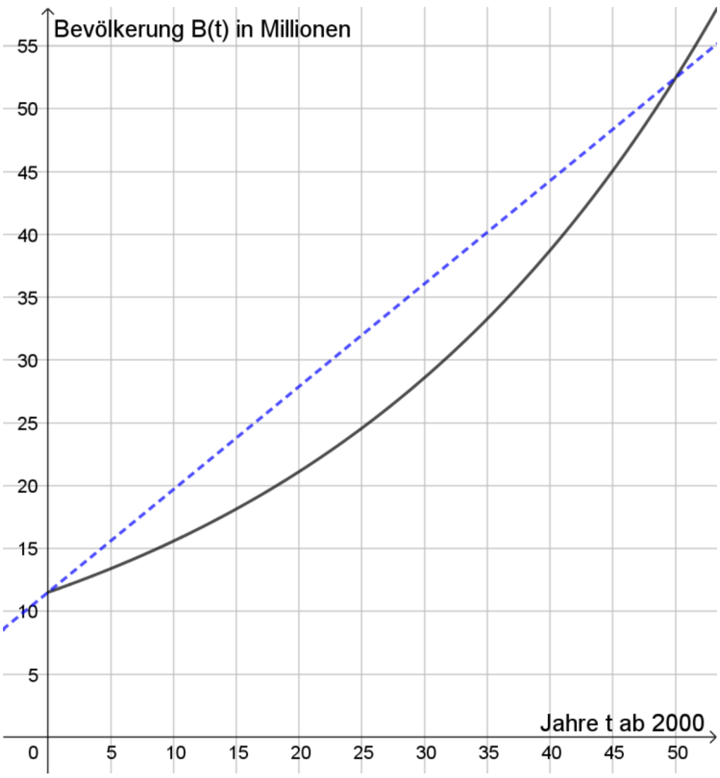
a)

- Das jährliche Wachstum entspricht einem konstanten relativen Anteil (3,08 %), daher kann von exponentiellem Wachstum gesprochen werden.
- Der Startwert liegt bei $a = 11{,}51$ (Mio).
- Der Wachstumsfaktor beträgt $b = 1 + \frac{3{,}08}{100} = 1{,}0308$.

b) $B(30) \approx 28{,}60$, im Jahr 2030 werden es voraussichtlich 28,60 Millionen sein.
$11{,}51 \cdot 1{,}0308^t = 40$
$1{,}0308^t = \frac{40}{11{,}51}$
$t = \log_{1{,}0308}\left(\frac{40}{11{,}51}\right) \approx 41{,}06$
Die Zahl wird voraussichtlich im Laufe des Jahres 2041 überschritten werden.

c) $11{,}51 \cdot 1{,}0308^t = 2 \cdot 11{,}51$
$1{,}0308^t = 2$
$t_D = \log_{1{,}0308}(2) \approx 22{,}85$ (a)

d) Es ist $B(50) \approx 52{,}46$.



e) $m_S = \frac{B(50)-B(0)}{50-0} \approx \frac{52{,}46-11{,}51}{50} = 0{,}819$.
Das durchschnittliche jährliche Bevölkerungswachstum beträgt rund 0,819 Millionen Menschen pro Jahr. Das entspricht der Steigung der in obigem Graphen eingezeichneten Sekante.

4. Zinseszins

a) $G(t) = a \cdot b^t$
I) $G(2) = 91\,936 \Rightarrow a \cdot b^2 = 91\,936$
II) $G(3) = 95\,613{,}44 \Rightarrow a \cdot b^3 = 95\,613{,}44$
Wegen I) $a = \frac{91\,936}{b^2}$ eingesetzt in II) ergibt sich $\frac{91\,936}{b^2} \cdot b^3 = 95\,613{,}44$ und damit $b = \frac{95\,613{,}44}{91\,936} = 1{,}04$
Weiter ist $a = 85\,000$ und
$G(t) = 85\,000 \cdot 1{,}04^t$

b) Hannes hatte ursprünglich 85 000 € zu einem Zinssatz von 4% angelegt.

c) $G(12) = 85\,000 \cdot 1{,}04^{12} \approx 136\,087{,}74$; sein Erbe reicht für das Apartment.

d) $1{,}04^t = 3 \Leftrightarrow t = \log_{1{,}04}(3) \approx 28{,}01$.
Er benötigt für die Verdreifachung seines Erbes fast genau 28 Jahre.