



Bruchgleichungen Übung

1. Bestimmen Sie jeweils die größtmögliche Definitionsmenge und den Hauptnenner in der Grundmenge G .

a) $\frac{2}{x-1} = \frac{x}{3x-3}$ in der Grundmenge $G = \mathbb{R}$

b) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{2}{x}$ in $G = \mathbb{Q}$

c) $\frac{1}{x-5} = -\frac{2}{x+3}$ in $G = \mathbb{R}$

d) $\frac{6}{2x-4} - \frac{4}{3x+6} = \frac{12}{x^2-4}$ in $G = \mathbb{R}$

2. Prüfen Sie, ob folgende Werte die Ungleichung lösen.

a) $x_1 = 2$ in $\frac{x-2}{2x+1} = \frac{x-2}{3x+1}$

b) $x_1 = 7$ in $\frac{x-7}{x+1} = \frac{x+2}{x-7}$

c) $x_1 = 0$ in $\frac{x^2-2x+5}{x+5} = 1$

d) $x_1 = 1$ in $\frac{x-2}{x} = \frac{x-6}{x+8}$

3. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

a) $\frac{x}{x+3} = \frac{x+3}{x}$

b) $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+2}$

c) $\frac{1}{x} = \frac{3}{x+4}$

d) $\frac{5x-7}{2x+2} + \frac{x+2}{3x+3} = 0$

e) $\frac{3x+2}{x-2} - \frac{x-5}{x+3} = \frac{2x^2+6x+20}{x^2+x-6}$

f) $\frac{8x(x-2)}{2x-4} = 4x + 3$

g) $\frac{1}{x} + \frac{x}{x-1} = \frac{4-x^2}{x-x^2}$

h) $\frac{2x-8}{x-1} + \frac{2x+6}{x-7} = 0$

i) $\frac{x^2}{2x-8} = \frac{x+4}{x-4}$

j) $\frac{2x-1}{3x-6} - \frac{4}{2x+6} = 1 + \frac{x-7}{(x-2)(x+3)}$

4. Betrachtet wird die Gleichung $\frac{x+a}{x+b} = \frac{x+c}{x+d}$ in ihrer größtmöglichen Definitionsmenge $D_{\max}$ über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$. Geben Sie $D_{\max}$ an und begründen Sie: Die Gleichung besitzt in ihrem Definitionsbereich dieselbe Lösungsmenge wie $(x+a)(x+d) = (x+c)(x+b)$. Die Werte von a, b, c, d sind dabei beliebige reelle Zahlen.

5. Nennen Sie drei verschiedene Möglichkeiten, bei denen eine Bruchgleichung keine Lösung besitzt.

Bruchgleichungen

Lösung

1.

- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
Hauptnenner $3(x - 1)$
- b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Hauptnenner $3x$
- c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 5\}$
Hauptnenner $(x - 5)(x + 3)$
- d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
Hauptnenner $6(x + 2)(x - 2) = 6x^2 - 24$

2.

- a) Ja
- b) Nein, $7 \notin D$
- c) Ja
- d) Nein, es ergibt sich eine falsche Aussage

3.

- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$
 $L = \{-1, 5\}$
- b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; -2\}$
 $L = \{0\}$
- c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 0\}$
 $L = \{2\}$
- d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
Es ergeben sich die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.
Wegen $x_1 = -1 \notin D$ ist $L = \{1\}$
- e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$
Hauptnenner $(x - 2)(x + 3) = x^2 - x + 6$
Es ergibt sich $x_1 = 2 \notin D$, also $L = \emptyset$
- f) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
 $\frac{8x(x-2)}{2(x-2)} = 4x + 3$
Hinweis: Mit $(x - 2)$ kürzen!
 $4x = 4x + 3$ ergibt einen Widerspruch, damit ist $L = \emptyset$
- g) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$
 $L = \{-3\}$

h) $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 7\};$

Multiplikation mit den Nennern ergibt die quadratische Gleichung $2x^2 - 9x + 25 = 0$.
Diese quadratische Gleichung besitzt eine negative Diskriminante von $D = -119$,
folglich ist $L = \emptyset$.

i) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

Hauptnenner $2(x - 4)$

Es entsteht die Gleichung $x^2 - 2x - 8 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$,
wobei $x_2 = 4$ nicht definiert ist. Es bleibt als Lösungsmenge $L = \{-2\}$.

j) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$

Hauptnenner $6(x - 2)(x + 3)$

Die entstehende Gleichung $x^2 - 7x - 48 = 0$ besitzt die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \frac{-7 - \sqrt{241}}{2}, \frac{-7 + \sqrt{241}}{2} \right\}.$$

4. Die Definitionsmenge der Gleichung ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-b; -d\}$. Die gewünschte Gleichung ergibt sich durch Multiplikation der Gleichung mit den beiden Nennern. Da der linke Nenner auf die rechte Seite wandert und der rechte auf die linke, wird dieses verkürzte Verfahren auch **über Kreuz multiplizieren** genannt.

5. Es existieren beispielweise die Möglichkeiten:

- Die sich ergebende Lösung ist in der Definitionsmenge nicht enthalten.
- Es ergibt sich ein Widerspruch, also eine falsche Aussage.
- Die entstehende quadratische Gleichung besitzt eine negative Diskriminante.