



## Ganzrationale Funktionen • Symmetrie von Funktionsgraphen Übung

1. Überprüfen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen auf Symmetrie und geben Sie ggf. die Art der Symmetrie an! Die Definitionsmenge  $D_f$  ist jeweils  $\mathbb{R}$ .
  - a)  $f_1(x) = x^5 + 7x^3 + 2x$
  - b)  $f_2(x) = \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{5}$
  - c)  $f_3(x) = x + 0,73x^3 + 1,537x^9$
  - d)  $f_4(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$
  - e)  $f_5(x) = -2x^2 + x^8 - 6$
  - f)  $f_6(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 - \frac{1}{2}x$
  
2. Jede Potenzfunktion der Form  $f(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  ist symmetrisch zum Koordinatensystem. Geben Sie eine einfache Regel an, mit der man die Art der Symmetrie angeben kann.
  
3. Nennen Sie einen einfachen Grundsatz, anhand dem man bei einer ganzrationalen Funktion auf den ersten Blick ohne Rechnung erkennen kann, ob sie symmetrisch ist und welche Art an Symmetrie vorliegt.
  
4. Begründen Sie, dass die gegebenen Funktionen keine Symmetrie zum Koordinatensystem besitzen.
  - a)  $f(x) = x^3 - 4x^2$  in der Definitionsmenge  $D = \mathbb{R}$
  - b)  $f(x) = x^5 + 5$  in der Definitionsmenge  $D = \mathbb{R}$
  - c)  $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 3x^2 + 2$  in der Definitionsmenge  $D = [-2; 3]$
  
5. Eine Funktion  $f(x)$  wird durch  $f(x - a) + b$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  um  $a$  in (positive)  $x$ -Richtung und um  $b$  in  $y$ -Richtung verschoben. Zeigen Sie damit, dass die folgenden Funktionen die angegebene Symmetrie besitzen.
  - a)  $f(x) = (x - 3)(x^2 - 6x + 8) + 4$  ist punktsymmetrisch zu  $P(3; 4)$ .
  - b)  $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4)^2 + 6x^2 + 24x + 19$  ist achsensymmetrisch zur Senkrechten bei  $x = -2$ .

## Ganzrationale Funktionen • Symmetrie von Funktionsgraphen

### Lösung

1.

- a) Punktsymmetrie zum Ursprung
- b) Achsensymmetrie zur y-Achse
- c) Punktsymmetrie zum Ursprung
- d) Keine Symmetrie
- e) Achsensymmetrie zur y-Achse
- f) Keine Symmetrie

2. Da  $(-x)^n = x^n$  für jedes gerade  $n \in \mathbb{N}$  und  $(-x)^n = -x^n$  für jedes ungerade, muss gelten:
- Für alle ungeraden Wert von  $n$  wie 1; 3; 5; ... ist der zugehörige Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.
  - Bei geraden Zahlen für  $n$  wie 2; 4; 6; ... ist entsprechend der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse.

Hinweis: Diese Regel gilt für alle ganzen Exponenten  $n \in \mathbb{Z}$ , also auch für negative Werte.

3. Besitzt  $f$  nur gerade Exponenten in der Variablen  $x$  einschließlich einer Konstanten, so ist der entsprechende Graph achsensymmetrisch zu y-Achse. Kommen nur ungerade Exponenten in  $x$  vor, dann ist der Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Liegen in einem Funktionsterm sowohl gerade, als auch ungerade Exponenten vor, herrscht keine der beiden Symmetrien.

4.

- a) Der Funktionsterm besitzt sowohl ungerade, als auch gerade Exponenten.
- b) Die 5 am Ende des Terms bewirkt eine Verschiebung um 5 nach oben im Koordinatensystem, daher liegt keine Punktsymmetrie zum Ursprung vor.
- c) Der zugehörige Graph ist lediglich aufgrund der Definitionsmenge nicht symmetrisch.

5.

- a) Die Funktion muss um 3 in negative x-Richtung und um 4 in negative y-Richtung verschoben werden. Die sich ergebende Funktion muss dann punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung sein.

$$\begin{aligned} f(x+3) - 4 &= ((x+3) - 3)((x+3)^2 - 6(x+3) + 8) + 4 - 4 \\ &= (x+3-3)(x^2 + 6x + 9 - 6x - 18 + 8) \\ &= x(x^2 - 1) \\ &= x^3 - x. \end{aligned}$$

Die verschobene Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da sie nur ungerade Exponenten besitzt. Die ursprüngliche Funktion muss daher punktsymmetrisch zu  $P(3; 4)$  sein.

- b) Der Funktionsgraph muss um 2 nach rechts verschoben werden und sollte dann achsensymmetrisch zur y-Achse sein.

$$\begin{aligned}f(x-2) &= \frac{1}{4}((x-2)^2 + 4(x-2) + 4)^2 + 6(x-2)^2 + 24(x-2) + 19 \\&= \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4 + 4x - 8 + 4)^2 + 6(x^2 - 4x + 4) + 24x - 48 + 19 \\&= \frac{1}{4}(x^2)^2 + 6x^2 - 24x + 24 + 24x - 29 \\&= \frac{1}{4}x^4 + 6x^2 - 5.\end{aligned}$$

Der verschobene Graph ist offenbar achsensymmetrisch zur y-Achse und der ursprüngliche damit zur Geraden  $x = -2$ .