

Lage von Gerade und Ebene Übung

1. Überprüfen Sie die Lage der Geraden g zur Ebene E .

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$
 $E: 2x_2 + x_3 = 3$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$
 $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$
 $E: 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$

2. Gegeben sind im $\mathbb{R}^3$ die Ebene

$$E_a: 3x_1 - x_2 + (a + 1) \cdot x_3 = 6 \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

sowie die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}.$$

- Geben Sie die besondere Lage von E_a im Koordinatensystem in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ an.
- Bestimmen Sie die Lage von g bezüglich der Ebenen E_a in Abhängigkeit vom Parameter a .
- Ermitteln Sie die Spurpunkte von g .

Setzen Sie ab hier $a = 3$.

- Skizzieren Sie die Ebene E_3 in ein Koordinatensystem ein.
- Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g mit der Ebene E_3 an. Verwenden Sie hierzu Ihre bisherigen Ergebnisse.

3. Gegeben sind im $\mathbb{R}^3$ die Ebene

$$E_a: x_1 - ax_2 + 2x_3 + 1 = 0 \text{ mit Parameter } a \in \mathbb{R}$$

und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } r \in \mathbb{R}.$$

- a) Geben Sie die besondere Lage der Geraden g im Koordinatensystem an.
- b) Bestimmen Sie die gegenseitige Lage von E_a und g in Abhängigkeit vom Parameter a .
- c) Geben Sie für den Fall eines Schnittpunktes von E_a und g diesen Schnittpunkt in Abhängigkeit von a an.
- d) Berechnen Sie den Spurpunkt von g sowie die Gleichung der Spurgeraden von E_a jeweils in der $x_1 - x_3$ - Ebene.

Lage von Gerade und Ebene

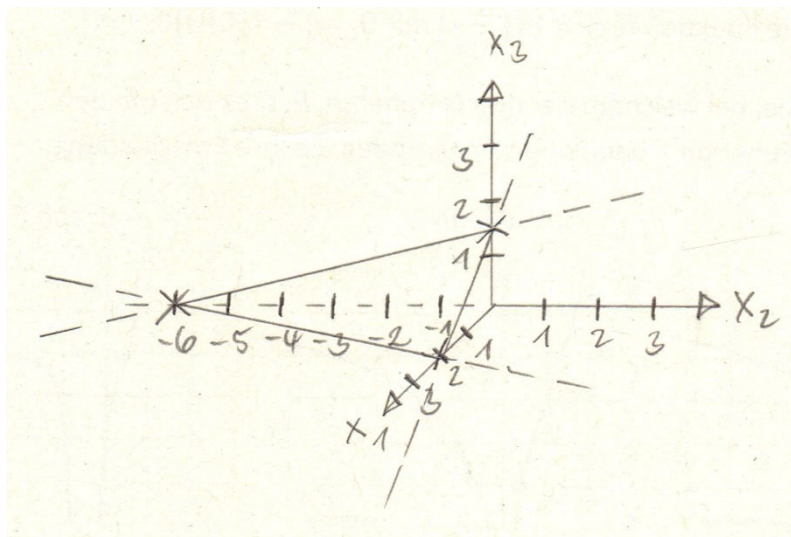
Lösung

1.

- Einsetzen von g in E ergibt den Wert $r = 1$. Daher schneiden sich g und E in $S(0; 4; 3)$.
- g und E sind echt parallel. Dazu kann man entweder E in Koordinatenform umwandeln und dann g einsetzen oder das entstehende lineare Gleichungssystem lösen. In beiden Fällen erhält man einen Widerspruch.
- Wenn man g in E einsetzt, ergibt sich eine wahre Aussage. Also ist g in E enthalten.

2.

- Für $a = -1$ ist E_{-1} parallel zur x_3 -Achse.
- g in E_a : $3(2 - 3r) - (-1 + r) + (a + 1) \cdot 2r = 6$
 $6 - 9r + 1 - r + 2ar + 2r = 6$
 $-8r + 2ar = -1$
 $-2r(4 - a) = -1$
 1. Fall: $a = 4 \Rightarrow g$ parallel zu E_4
 2. Fall: $a \neq 4 \Rightarrow$ genau ein Schnittpunkt
- $S_{12}(2; -1; 0)$ für $r = 0$
 $S_{13}(-1; 0; 2)$ für $r = 1$
 $S_{23}\left(0; -\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ für $r = \frac{2}{3}$
- Die Spurpunkte der Ebene $E_3: 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6$ sind $S_1(2; 0; 0)$, $S_2(0; -6; 0)$ und $S_3\left(0; 0; \frac{3}{2}\right)$.



- Für $a = 3$ ergibt sich nach Teilaufgabe b) der Wert $r = \frac{-1}{-2(4-a)} = \frac{1}{2}$.
 Damit ist $S\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$.

3.

a) g liegt parallel zur x_1x_2 - Ebene.

b)

1. Fall: $a = 0,5$ 2. Fall: $a \neq 0,5$

g parallel zu E_a g schneidet E

c) Aus 2. folgt für $a \neq 0,5$, dass $r = \frac{a-4}{2a-1}$, also $S\left(\frac{a+3}{2a-1}; \frac{7}{2a-1}; 1\right)$

d) $S_{13}(0,5; 0; 1); s_{13}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$