



Lineare Gleichungssysteme (drei Unbekannte) • Lösbarkeit Übung

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungssysteme.

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & 3x_1 & +x_2 & = & 0 \\ \text{a) II)} & 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ \text{III)} & 3x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & 4x_1 & -4x_2 & +x_3 & = & 7 \\ \text{b) II)} & x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & -3 \\ \text{III)} & 2x_1 & -10x_2 & -3x_3 & = & 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & -2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 0 \\ \text{c) II)} & x_1 & & +x_3 & = & 3 \\ \text{III)} & 4x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = & 6 \end{array}$$

2. Ein lineares Gleichungssystem besitzt die beiden Lösungen $(0; 1; 1)$ und $(2; 5; 3)$. Geben Sie zwei weitere Lösungen an.

3. Erstellen Sie jeweils ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten und drei Gleichungen, das...

a) ...genau die Lösungsmenge $L = \{(5; -3; 1)\}$ besitzt.

b) ...unlösbar ist.

c) ...unendlich viele Lösungen besitzt. Geben Sie für diesen Fall die Lösungsmenge Ihres Systems an.

4. Durch die erweiterten Koeffizientenmatrizen werden lineare Gleichungssysteme dargestellt. Geben Sie die Anzahl deren Lösungen an.

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{array} \right)$$

$$\text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 3 & 12 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

$$\text{c) } \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 10 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\text{d) } \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{e) } \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ a & 2 & a & 2 \end{array} \right) \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{f) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & (a-2) & -2 \\ -2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 9 \end{array} \right) \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

5. Bei der Umrechnung des RGB-Farbmodells im Computer auf das CMY-Modell für einen Drucker werden vorliegende Farbinformationen entsprechend folgendem Gleichungssystem umgewandelt. Die Grundfarben sind mit R (Rot), B (Blau) und G (Grün) bzw. C (Cyan), M (Magenta) und Y (Gelb) bezeichnet.

$$\text{I)} \quad 0,2R + 0,3G + 0,2B = C$$

$$\text{II)} \quad 0,5R - 0,1G = M$$

$$\text{III)} \quad 0,1R + 0,4G + 0,3B = Y$$

- a) Berechnen Sie den Farbwert M für $\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie umgekehrt den Wert von R für

$$\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

- b) Durch einen Softwarefehler wird anstelle der dritten Zeile der Koeffizientenmatrix nochmals die zweite Zeile verwendet. Sie lautet dann

$$\text{III)} \quad 0,5R - 0,1G = Y.$$

Erläutern Sie die Folgen des Fehlers in Bezug auf die Lösbarkeit des Gleichungssystems.

6. Lösen Sie folgende linearen Gleichungssysteme in Abhängigkeit vom jeweiligen Parameter $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{I)} \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$\text{II)} \quad ax_2 + 2x_3 = 2$$

$$\text{III)} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{I)} \quad 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4$$

$$\text{II)} \quad 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6$$

$$\text{III)} \quad -2x_1 - x_2 + ax_3 = -4$$

Lineare Gleichungssysteme (drei Unbekannte) • Lösbarkeit

Lösung

1.

a) $L = \{(1; -3; 4)\}$

b) $L = \emptyset$

c) $L = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 3 - x_3 \wedge x_2 = 2 - \frac{1}{3}x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$

2. Da das System bereits zwei Lösungen hat, muss es bereits unendlich viele Lösungen besitzen. Mit Sicherheit liegen die Punkte dazu liegen auf der durch $(0; 1; 1)$ und $(2; 5; 3)$ festgelegten Geraden. Die kann beispielsweise durch die Parameterform

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Für $r = 0$ und $r = 1$ erhalten wir die beiden vorgegebenen Lösungen, beispielsweise für $r = 0,5$ und $r = 2$ zwei weitere mögliche Zahlentripel $(1; 3; 2)$ und $(4; 9; 5)$.

3.

a) Einfachste Möglichkeit wäre z.B.
$$\begin{array}{lll} \text{I)} & x_1 & = 5 \\ \text{II)} & x_2 & = -3 \\ \text{III)} & x_3 & = 1 \end{array}$$

b) Wichtig ist hier ein Widerspruch, z.B. in der dritten Zeile:
$$\begin{array}{lllll} & \text{I)} & x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ & \text{II)} & & x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & \text{III)} & & & 0 & = & 1 \end{array}$$

c) Beachten Sie die Nullzeile in
$$\begin{array}{lllll} \text{I)} & x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ \text{II)} & & x_2 & +x_3 & = & 0; \\ \text{III)} & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

hier ist $L = \{(1; x_2; x_3) \mid x_2 = -x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$.

4.

- a) Die Zeilen II) und III) widersprechen sich, also keine Lösung.
- b) Die ersten beiden Zeilen sind Vielfache, folglich unendlich viele Lösungen.
- c) Das Gleichungssystem kann eindeutig aufgelöst werden, eine Lösung.
- d) Die ersten beiden Zeilen widersprechen sich, keine Lösung.
- e) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gibt's unendlich viele Lösungen.
- f) Für $a = 2$ existieren unendlich viele Lösungen, für $a \neq 2$ keine.

5.

a) $M = 0,5 \cdot 50 - 0,1 \cdot 50 = 20$

Für $\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$ ergibt sich $R = 10$.

b) Subtraktion III) – II) liefert die Gleichung $Y - M = 0$.

Für den Wert $M = Y$ existieren daher unendlich viele Lösungen,
für $M \neq Y$ keine Lösung.

6.

a) 1. Fall: $a = -2$

Widerspruch, demnach

$$L = \emptyset$$

2. Fall: $a \neq -2$

Eindeutige, von a abhängige Lösung

$$L = \left\{ \left(\frac{a-2}{a+2}, \frac{4}{a+2}, \frac{-a+2}{a+2} \right) \right\}$$

b) 1. Fall: $a = 3$

Unendlich viele Lösungen

$$L = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = 3 + 2x_3 \wedge x_2 = -2 - x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\}$$

2. Fall: $a \neq 3$

Eine Lösung

$$L = \{3; -2; 0\}$$