

Lineare Gleichungssysteme (zwei Unbekannte) • Lösbarkeit Übung

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungssysteme. •••

a) I) $2x + 3y = 5$
II) $3x + 4y = 7$

b) I) $\frac{1}{3}x + y = 2$
II) $-x - 3y = 3$

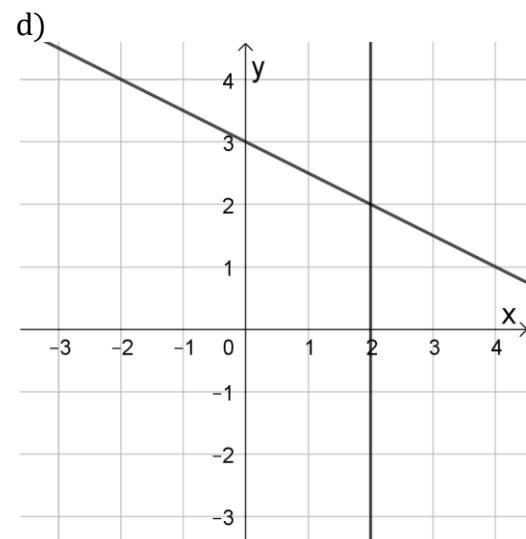
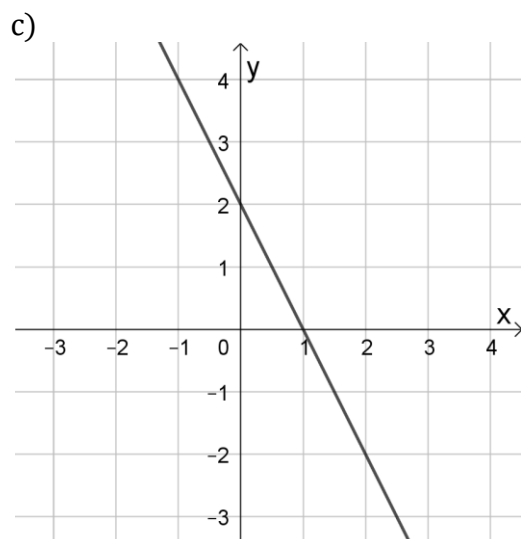
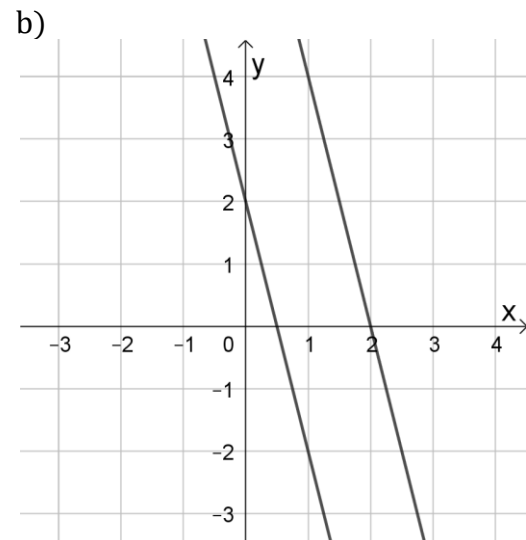
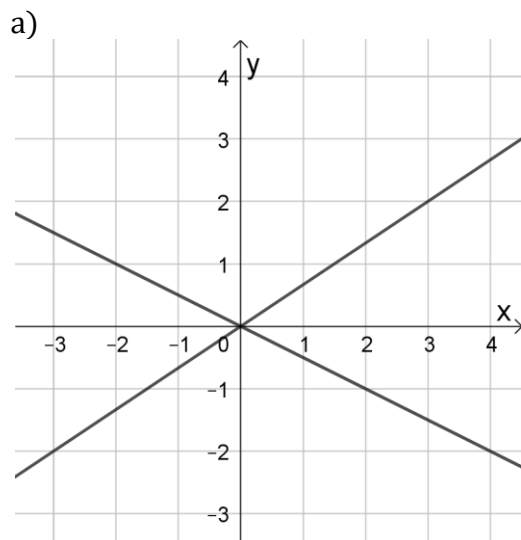
c) I) $\frac{1}{2}x - 2y = 1$
II) $-2x + 8y = -4$

d) I) $2x - 3y = 5$
II) $3x - \frac{9}{2}y = 1$

e) I) $-3y = 9$
II) $\frac{1}{2}x = 4$

f) I) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{5}y = 1$
II) $5x - 4y = 20$

2. Entnehmen Sie jedem Diagramm ein geeignetes Gleichungssystem. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an. •••



3. Stellen Sie, falls möglich, jeweils ein lineares Gleichungssystem auf, das folgende Lösungsmenge besitzt. ••◦

a) $L = \{(1; 2)\}$

b) $L = \emptyset$

c) $L = \{(x; y) | y = 2x + 1\}$

d) $L = \{(1; -1); (2; -2); (3; -3)\}$

4. Entscheiden Sie, ob es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass das Gleichungssystem eine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen besitzt.

$$\text{I) } 2x - 3y = 1$$

$$\text{II) } 4x + ay = 3$$

5. Ein lineares Gleichungssystem besitzt die beiden Lösungen $(5; -7)$ und $(3; -3)$. Berechnen Sie zwei weitere Lösungen des Systems. ••◦

6. Ein lineares Gleichungssystem

$$\text{I) } ax + by = c$$

$$\text{II) } dx + ey = f$$

ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante der zugehörigen Koeffizientenmatrix, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = a \cdot e - b \cdot d,$$

einen Wert ungleich Null besitzt. Überprüfen Sie damit, ob folgende Systeme eindeutig lösbar sind. ••◦

a) I) $3x + 2y = 7$
II) $-2x + y = 3$

b) I) $2x - 3y = 4$
II) $-4x + 6y = -8$

c) I) $5x + 2y = 7$
II) $3x + 4y = 6$

d) I) $ax + 3y = 2$
II) $ax + ay = a$ mit $a \in \mathbb{R}$

Lineare Gleichungssysteme (zwei Unbekannte) • Lösbarkeit Lösung

1.

- a) $L = \{(1; 1)\}$
- b) $L = \emptyset$
- c) $L = \left\{ (x; y) \mid y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x \wedge x \in \mathbb{R} \right\}$
- d) $L = \emptyset$
- e) $L = \{(8; -3)\}$
- f) $L = \left\{ (x; y) \mid y = \frac{5}{4}x - 5 \wedge x \in \mathbb{R} \right\}$

2. Beispiele für mögliche Gleichungssysteme sind:

- a) I) $y = -\frac{1}{2}x$
II) $y = \frac{3}{2}x$, Lösungsmenge $L = \{(0; 0)\}$
- b) I) $y = -4x + 8$
II) $y = -4x + 2$ mit $L = \emptyset$
- c) I) $y = -2x + 2$
II) $\frac{1}{2}y = -x + 1$ mit $L = \{(x; y) \mid y = -2x + 2 \wedge x \in \mathbb{R}\}$
- d) I) $y = -\frac{1}{2}x + 3$
II) $x = 2$ und $L = \{(2; 2)\}$

3. Hier existieren keine eindeutigen Ergebnisse. Ein jeweils einfaches Beispiel dafür wäre:

- a) I) $x + y = 3$
II) $x - y = -1$
- b) I) $x + y = 1$
II) $2x + 2y = 3$
- c) I) $y = 2x + 1$
II) $3y = 6x + 3$

d) Ein Gleichungssystem mit drei Lösungen kann nicht existieren.

4. II) $- 2 \cdot$ I) ergibt $(a + 6) \cdot y = 1$.

Ist $a = -6$, dann existiert keine Lösung, bei $a \neq -6$ genau eine.
Der Fall der unendlich vielen Lösungen kann nicht auftreten.

5. Da bereits zwei Lösungspaare vorhanden sind, müssen sogar unendlich viele Lösungen bestehen. Die zugehörigen Punkte liegen alle auf einer Geraden. Die Gerade durch $P(5; -7)$ und $Q(3; -3)$ hat die Gleichung $y = -2x + 3$. Die Lösungen des Systems sind damit z.B. auch $R(1; 1)$ oder $S(7; -11)$.

6.

a) $\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 7 \neq 0$, d.h. eindeutig lösbar.

b) $\det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot 6 - (-3) \cdot (-4) = 0$, folglich nicht eindeutig lösbar.

c) $\det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 20 - 6 = 14 \neq 0$, eindeutig lösbar.

d) $\det \begin{pmatrix} a & 3 \\ a & a \end{pmatrix} = a^2 - 3a = a(a - 3)$.

Die Determinante ergibt Null, wenn $a = 0$ oder $a = 3$.

Das Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, falls $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$.