

## Lineare Unabhängigkeit von Vektoren Übung

1. Überprüfen Sie auf lineare Unabhängigkeit:

a)  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c)  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

d)  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Begründen Sie ohne Rechnung, dass folgende Vektoren linear abhängig sind:

a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

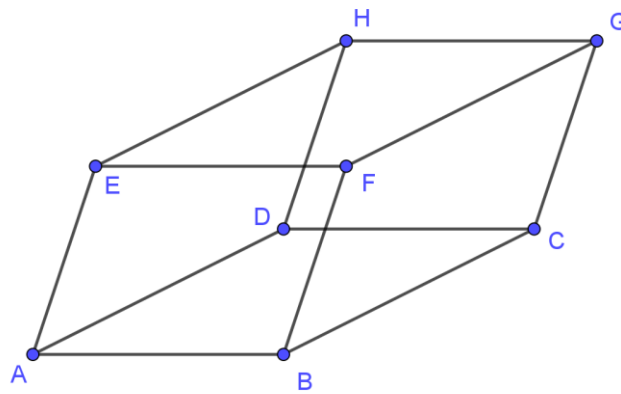
b)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

c)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Prüfen Sie, für welchen Wert von  $k \in \mathbb{R}$  die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ k+4 \\ k-2 \end{pmatrix}$  und

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  linear abhängig sind.

4. Betrachtet wird im  $\mathbb{R}^3$  der Spat ABCDEFGH, vergleiche Skizze.



Überprüfen Sie auf lineare Unabhängigkeit.

- a)  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{EF}$
- b)  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{AD}$
- c)  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{DC}$  und  $\overrightarrow{EG}$
- d)  $\overrightarrow{EF}$ ,  $\overrightarrow{EH}$  und  $\overrightarrow{HB}$

5. Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) Wenn ein Vektor in einer Menge von Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden kann, sind diese Vektoren stets linear unabhängig.
- b) Eine Menge von zwei Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  kann niemals linear unabhängig sein.
- c) Im  $\mathbb{R}^3$  sind vier Vektoren immer linear abhängig.
- d) Wenn zwei Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  nicht kollinear sind, sind sie immer linear unabhängig.
- e) Kann mit drei Vektoren eine geschlossene Vektorkette gebildet werden, dann sind sie linear abhängig.
- f) Die Gleichung  $r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + r_3 \cdot \vec{a}_3 = \vec{0}$  ist immer lösbar.
- g) Ist  $\vec{a}$  zu  $\vec{b}$  linear unabhängig, ebenso wie  $\vec{b}$  zu  $\vec{c}$  und  $\vec{a}$  zu  $\vec{c}$ , dann sind auch  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  linear unabhängig.

## Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

### Lösung

1.

- a) Das Gleichungssystem  $r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{0}$  besitzt unendlich viele Lösungen, weil alle Zeilen Vielfache voneinander sind. Beide Vektoren sind deswegen linear abhängig.
- b) Das Gleichungssystem besitzt nur die Lösung  $r_1 = r_2 = 0$ , daher linear unabhängig

Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie Vielfache sind. Sie liegen dann auf einer Geraden und heißen **kollinear**.

- c) Es existieren unendlich viele Lösungen wie  $\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 - \vec{a}_3 = \vec{0}$ , also linear abhängig.
- d) Linear unabhängig.

Drei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie **komplanar** sind, d.h. in einer Ebene liegen.

2.

- a) Wegen  $\vec{b} = -3 \cdot \vec{a}$  sind beide Vektoren Vielfache, also sind sie linear abhängig.
- b) Wegen  $\vec{c} = -2 \cdot \vec{b}$  sind  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  kollinear. Daher sind  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  komplanar und daher linear abhängig.
- a) Vier Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  sind stets linear abhängig.

3. Die Vektoren sind linear abhängig für  $k = -2$ , weil das entsprechende Gleichungssystem für diesen Wert unendlich viele Lösungen besitzt.

4.

- a)  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{EF}$  sind linear abhängig, weil sie auf einer Geraden liegen. Dies erkennt man leicht, wenn man  $\overrightarrow{EF}$  am Fuß bis zu Punkt A schiebt.
- b)  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{AD}$  sind linear unabhängig, weil sie nicht kollinear sind.
- c) Die drei Vektoren sind linear abhängig, da sie in einer Ebene liegen.
- d) Linear unabhängig.

5.

- a) f, die Darstellung muss eindeutig sein.
- b) f, die beiden Vektoren dürfen nur nicht kollinear sein.
- c) w, das entsprechende Gleichungssystem ist unterbestimmt und besitzt deswegen immer unendlich viele Lösungen.
- d) w, das entstehende Gleichungssystem besitzt dann nur die triviale Lösung.
- e) w, es muss dann neben der trivialen Lösung noch eine weitere geben.
- f) w,  $r_1 = r_2 = 0$  ist diese Lösung.
- g) f, die drei Vektoren können zwar jeweils auf verschiedenen Geraden liegen, aber trotzdem auf einer gemeinsamen Ebene.