



Lineare Ungleichungen mit Parameter Übung

1. Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen für die gegebene Werte des Parameters.

a) $(a - 1)x \geq 0$ für $a = 3$, $a = -2$ und $a = 1$.

b) $(7 + b)x \leq 3x + 4$ für $b = 0$, $b = 2$ und $b = -4$.

c) $cx < 3x + 1$ für $c = -1$, $c = 0$ und $c = 3$.

2. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die jeweilige Ungleichung keine Lösung besitzt.

a) $ax > 1$

b) $ax + 6 \leq 9x + 5$

3. Ermitteln Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$.

a) $2x - 4a \leq 0$

b) $ax + 2x > 2$

c) $ax - 1 < a$

d) $ax + 3 < 7 - a$

e) $a(x - 3) < 2x$

f) $a - 4(x - 2) < 2(a - 3)$

g) $7x > a - 2$

h) $x + a \leq 2a - 3x$

i) $ax \geq 3$

j) $ax + 3 < 7 - a$

k) $2a + 5x > 3a + ax$

l) $3ax + 5 \leq 3x - 4$

m) $2x + 4a > 3(1 + ax)$

n) $a^2x + x + a + 1 > 5a^2x - 3x + 5a - 3$

4. Prüfen Sie, ob es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Ungleichung

$$8kx + 11k \leq 4x - 3(k + 1)$$

die Lösungsmenge $L = [2; \infty[$ besitzt.

Geben Sie gegebenenfalls den zugehörigen Wert von k an.

Lineare Ungleichungen mit Parameter

Lösung

1.

- a) Für $a = 3$ ist $L = [0; \infty[$
Für $a = -2$ ist $L = [-\infty; 0]$
Für $a = 1$ ist $L = \mathbb{R}$

- b) Für $b = 0$ ist $L = [-\infty; 1]$
Für $b = 2$ ist $L = [-\infty; \frac{2}{3}[$
Für $b = -4$ ist $L = \mathbb{R}$

- c) Für $c = 0$ ist $L = [-\infty; 1]$
Für $c = 2$ ist $L = [-\infty; \frac{2}{3}[$
Für $c = -4$ ist $L = \mathbb{R}$

2.

- a) Die Sonderfälle ergeben sich meistens an der Stelle, an der man durch Null teilen müsste. Hier ist durch a zu teilen, also ist $a = 0$ zu betrachten. Für diesen Wert lautet die Gleichung $0 > 1$, was eine falsche Aussage ist. Daher ist hier $L = \emptyset$ für $a = 0$.
- b) Umstellen ergibt $(a - 9) \cdot x \leq -1$. Diese Ungleichung ist unlösbar für $a = 9$.

3.

- a) $L =] - \infty; 2a]$

- b) 1. Fall: $a < -2$: $L =] - \infty; \frac{2}{a+2}[$
2. Fall: $a = -2$: $L = \emptyset$
3. Fall: $a > -2$: $L =] \frac{2}{a+2}; \infty[$

- c) 1. Fall: $a < 0$: $L =] \frac{a+1}{a}; \infty[$
2. Fall: $a = 0$: $L = \mathbb{R}$
3. Fall: $a > 0$: $L =] - \infty; \frac{a+1}{a}[$

- d) 1. Fall: $a > 0$: $L =] - \infty; \frac{4-a}{a}[$
2. Fall: $a = 0$: $L = \mathbb{R}$
3. Fall: $a < 0$: $L =] \frac{4-a}{a}; \infty[$

- e) 1. Fall: $a > 2$: $L =] - \infty; \frac{3a}{a-2}[$
2. Fall: $a = 2$: $L = \mathbb{R}$
3. Fall: $a < 2$: $L =] \frac{3a}{a-2}; \infty[$

- f) $L =] \frac{14-a}{4}; \infty[$

- g) $L =] \frac{a-2}{7}; \infty[$

h) $L =] - \infty; \frac{a}{4}]$

i) 1. Fall: $a \leq 0$: $L =] - \infty; \frac{3}{a}]$

2. Fall: $a = 0$: $L = \emptyset$

3. Fall: $a \geq 0$: $L = [\frac{3}{a}; \infty[$

j) 1. Fall: $a < 0$: $L =] \frac{4-a}{a}; \infty[$

2. Fall: $a = 0$: $L = \mathbb{R}$

3. Fall: $a > 0$: $L =] - \infty; \frac{4-a}{a}[$

k) 1. Fall: $a < 5$: $L =] \frac{a}{5-a}; \infty[$

2. Fall: $a = 5$: $L = \emptyset$

3. Fall: $a > 5$: $L =] \infty; \frac{3a}{a-2}[$

l) 1. Fall: $a < 1$: $L = [\frac{-3}{a-1}; \infty[$

2. Fall: $a = 1$: $L = \emptyset$

3. Fall: $a > 1$: $L =] - \infty; \frac{-3}{a-1}]$

m) 1. Fall: $a < \frac{2}{3}$: $L =] \frac{3-4a}{2-3a}; \infty[$

2. Fall: $a = \frac{2}{3}$: $L = \emptyset$

3. Fall: $a > \frac{2}{3}$: $L =] - \infty; \frac{3-4a}{2-3a}]$

n) Fall 1: $a < -1$: $L =] - \infty; \frac{-1}{a+1}[$

Fall 2: $a = -1$: $L = \mathbb{R}$

Fall 3: $-1 < a < 1$: $L =] \frac{-1}{a+1}; \infty[$

Fall 4: $a = 1$: $L = \emptyset$

Fall 5: $a > 1$: $L =] - \infty; \frac{-1}{a+1}[$

(Hinweis: Theoretisch könnten die Fälle 1 und 5 zusammengefasst werden)

4. Nach Umstellen der Ungleichung zu $x(8 - 4k) \leq -14k - 3$ ergeben sich die Möglichkeiten

Fall 1: $k < \frac{1}{2}$: $L = [\frac{-14k-3}{8k-4}; \infty[$

Fall 2: $k = \frac{1}{2}$: $L = \emptyset$

Fall 3: $k > \frac{1}{2}$: $L =] - \infty; \frac{-14-3k}{8-4k}]$.

Die vorgegebene Lösungsmenge passt nur zu Fall 1, weshalb $\frac{-14k-3}{8k-4} = 2$ gelten muss.

Daraus erhält man $k = \frac{1}{6}$, was wegen $\frac{1}{6} < \frac{1}{2}$ tatsächlich in Fall 1 möglich ist.