



Quadratwurzeln Übung

1. Berechnen Sie folgende Wurzeln im Kopf.

a) $\sqrt{49}$

b) $\sqrt{81}$

c) $\sqrt{64}$

d) $\sqrt{289}$

e) $\sqrt{1600}$

f) $\sqrt{169}$

g) $\sqrt{900}$

h) $\sqrt{196}$

i) $\sqrt{361}$

j) $\sqrt{225}$

k) $\sqrt{0,36}$

l) $\sqrt{0,0001}$

m) $\sqrt{\frac{1}{25}}$

n) $\sqrt{\frac{16}{9}}$

o) $\sqrt{\frac{81}{400}}$

2. Schreiben Sie als Wurzel.

a) 12

b) 18

c) 11

d) 0,4

e) 2,5

f) 0,14

g) $\frac{3}{5}$

h) $\frac{1}{7}$

i) $\frac{11}{17}$

3. Ermitteln Sie folgende Wurzeln mit dem Taschenrechner und runden Sie jeweils auf drei geltende Ziffern.

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) $\sqrt{1000}$

d) $\sqrt{666}$

e) $\sqrt{0,961}$

f) $\sqrt{0,7}$

4. Vervollständigen Sie die untenstehende Tabelle.

a			49		144		
$\sqrt{a}$	1	5		11		20	25

5. Vergleichen Sie jeweils die beiden Ausdrücke.

a) $\sqrt{9 + 16}$ und $\sqrt{9} + \sqrt{16}$

b) $\sqrt{144} + \sqrt{256}$ und $\sqrt{144 + 256}$

c) $\sqrt{169} - \sqrt{25}$ und $\sqrt{169 - 25}$

6. Eine Quadratwurzel wird potenziert, indem man den Radikanden in gleicher Weise potenziert und aus der neuen Potenz die Quadratwurzel zieht:

$$(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n} \text{ für alle } a \in \mathbb{R}_0^+, n \in \mathbb{N}$$

- a) Bestätigen Sie die Formel anhand dreier von Ihnen gewählter Zahlenbeispiele.
 b) Beweisen Sie die Umformung mit Hilfe der Potenzgesetze.
 c) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

$$(\sqrt{3})^6$$

$$(\sqrt{2})^8$$

$$(\sqrt{5})^4$$

$$(\sqrt{5} + 3\sqrt{7})^2$$

$$(\sqrt{8} - \sqrt{3})(\sqrt{8} + \sqrt{3})$$

$$(\sqrt{u-1} - \sqrt{u+1})^2, \text{ wobei } u > 1$$

7. Quadratwurzeln können auch mit der Potenz $\frac{1}{2}$ geschrieben werden:

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

Begründen Sie dies knapp mit Hilfe der Potenzgesetze. Schreiben Sie folgende Ausdrücke als Wurzeln ohne Exponenten:

$$3^{\frac{1}{2}}$$

$$7^{1,5}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-5}{2}}$$

8. Ein mögliches Verfahren zur Ermittlung von Näherungswerten von Quadratwurzeln ist die **Intervallschachtelung**. Zum Beispiel kann der Wert von $\sqrt{7}$ folgendermaßen abgeschätzt werden: Wegen

$$2^2 < 7 < 3^2$$

muss gelten

$$2 < \sqrt{7} < 3.$$

Durch weiteres Probieren findet man mit $2,6^2 = 6,76$ und $2,7^2 = 7,29$ weitere, engere Grenzen:

$$2,6 < \sqrt{7} < 2,7$$

Fortführung der Intervallschachtelung führt zu einem entsprechend genaueren Ergebnis, z.B.

$$2,64575131 < \sqrt{7} < 2,64575132.$$

Finden Sie eine Eingrenzung auf jeweils zwei geltende Ziffern zu folgenden Wurzeln:

$$\sqrt{3}$$

$$\sqrt{11}$$

$$\sqrt{170}$$

Quadratwurzeln

Lösung

1.

- a) $\sqrt{49} = 7$
- b) $\sqrt{81} = 9$
- c) $\sqrt{64} = 8$
- d) $\sqrt{289} = 17$
- e) $\sqrt{1600} = 40$
- f) $\sqrt{169} = 13$
- g) $\sqrt{900} = 30$
- h) $\sqrt{196} = 14$
- i) $\sqrt{361} = 19$
- j) $\sqrt{225} = 15$
- k) $\sqrt{0,36} = 0,6$
- l) $\sqrt{0,0001} = 0,01$
- m) $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$
- n) $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$
- o) $\sqrt{\frac{81}{400}} = \frac{9}{20}$

2.

- a) $12 = \sqrt{144}$
- b) $1 = \sqrt{324}$
- c) $11 = \sqrt{121}$
- d) $0,4 = \sqrt{0,16}$
- e) $2,5 = \sqrt{6,25}$
- f) $0,14 = \sqrt{0,0196}$
- g) $\frac{3}{5} = \sqrt{\frac{9}{25}}$
- h) $\frac{1}{7} = \sqrt{\frac{1}{49}}$
- i) $\frac{11}{17} = \sqrt{\frac{121}{289}}$

3.

- a) $\sqrt{2} \approx 1,41$
- b) $\sqrt{3} \approx 1,73$
- c) $\sqrt{1000} \approx 31,6$
- d) $\sqrt{666} \approx 25,8$
- e) $\sqrt{0,961} \approx 0,980$
- f) $\sqrt{0,7} \approx 0,837$

4.

a	1	25	49	121	144	400	625
$\sqrt{a}$	1	5	7	11	12	20	25

5. Hinweis: Aus dieser Aufgabe sollten Sie die Erkenntnis mitnehmen, dass die Umrechnung $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ grundsätzlich falsch ist. Eine Wurzel kann also nicht auf eine Summe oder auf eine Differenz aufgeteilt werden.

- a) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ und $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$
 b) $\sqrt{144} + \sqrt{256} = 12 + 16 = 28$ und $\sqrt{144+256} = \sqrt{400} = 20$
 c) $\sqrt{169} - \sqrt{25} = 13 - 5 = 8$ und $\sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12$

6.

- a) z.B. $\sqrt{2^2} = 2$ und $\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$;
 $\sqrt{3^2} = 3$ und $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$;
 $\sqrt{5^2} = 5$ und $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$
 b) $(\sqrt{a})^n = \underbrace{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \dots \cdot \sqrt{a}}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{\sqrt{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}}_{n \text{ Faktoren}} = \sqrt{a^n}$
 c) $(\sqrt{3})^6 = 27$
 $(\sqrt{2})^8 = 16$
 $(\sqrt{5})^4 = 125$
 $(\sqrt{5} + 3\sqrt{7})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 3\sqrt{7} + (3\sqrt{7})^2 = 5 + 6\sqrt{35} + 63 = 68 + 6\sqrt{35}$
 $(\sqrt{8} - \sqrt{3})(\sqrt{8} + \sqrt{3}) = 8 - 3 = 5$
 $(\sqrt{u-1} - \sqrt{u+1})^2 = u - 1 - 2\sqrt{u-1}\sqrt{u+1} + u + 1 = 2u - 2\sqrt{u^2 - 1}$

7. Für $a \geq 0$ gilt $\sqrt{a^2} = a = a^1 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$, also $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} 3^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{3} \\ 7^{1,5} &= 7^{\frac{3}{2}} = \sqrt{7^3} = \sqrt{343} \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-5}{2}} &= \left(\frac{3}{1}\right)^{\frac{+5}{2}} = \sqrt{3^5} = \sqrt{243} \end{aligned}$$

8. $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$
 $3,3 < \sqrt{11} < 3,4$
 $13 < \sqrt{170} < 14$