



## Zahlenmengen Übung

1. In welchen Zahlenmengen sind die folgenden Zahlen jeweils enthalten (✓) oder nicht (✗)?

|                        | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{N}$ |
|------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $\frac{3}{-2}$         |              |              |              |              |
| $0,53\overline{1}$     |              |              |              |              |
| $-100$                 |              |              |              |              |
| $\sqrt{33}$            |              |              |              |              |
| $\frac{-99}{-11}$      |              |              |              |              |
| $\pi$                  |              |              |              |              |
| $\sqrt{\frac{36}{25}}$ |              |              |              |              |
| $\log_6(8)$            |              |              |              |              |
| $2^{-3}$               |              |              |              |              |

2. Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

- a) Die Differenz zweier natürlicher Zahlen ist in jedem Fall wieder eine natürliche Zahl.
- b) Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegt stets eine weitere rationale Zahl.
- c) Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist wieder eine ganze Zahl.
- d) Die Zahl 5 ist eine reelle Zahl.
- e) Eine rationale Zahl besitzt stets eine endliche Dezimaldarstellung.
- f) Es existieren unendlich viele ganze Zahlen kleiner als 7.
- g) Eine ganze Zahl ist immer auch rational.
- h) Die Division zweier ganzer Zahlen ist wieder eine ganze Zahl.
- i) Jede irrationale Zahl ist auch eine reelle Zahl.
- j) Die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl ist immer irrational.
- k) Die Quadratwurzel aus einer Primzahl ist stets irrational.

3. Beschreiben Sie die Zahlenmengen in Worten. Geben Sie gegebenenfalls jeweils zwei Beispiele dazu an.

- a)  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- b)  $\mathbb{Z}^+$
- c)  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$
- d)  $\mathbb{Z}_0^- \cup \mathbb{N}$
- e)  $n \cdot 2$  mit  $n \in \mathbb{N}$
- f)  $\mathbb{R} \setminus ]-\infty; 0[$
- g)  $\mathbb{Q}_0^- \cap \mathbb{R}_0^-$
- h)  $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$

4. Markieren Sie alle irrationalen Zahlen.

4                       $\pi$                        $\sqrt{324}$                        $12\sqrt{2}$                        $\frac{3}{-4}$                        $0,\bar{7}$

5. Ordnen Sie die aufgeführten Begriffe den Lücken ① bis ⑦ des nachfolgenden Texts zu.

- irrationalen Zahlen
- Hamiltonsche Quaternionen
- rationalen Zahlen
- natürlichen Zahlen
- reellen Zahlen
- ganzen Zahlen
- komplexen Zahlen

Die Menge der ①  $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$  ist die kleinste aller bekannten Zahlenmengen, besitzt jedoch bereits unendlich viele Elemente.

Erweitert man diese um die Null und die negativen ganzen Zahlen, so erhält man mit  $\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$  die Menge  $\mathbb{Z}$  der ②.

Die ③  $\mathbb{Q}$  umfassen alle Zahlen, die in der Form  $\frac{p}{q}$  mit  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $q \neq 0$  geschrieben werden können.

Werden nun noch die ④ (häufig mit  $\Pi$  bezeichnet) wie  $\sqrt{2}$ , die Kreiszahl  $\pi$  oder die Eulersche Zahl  $e$  hinzugefügt, so ergibt sich die Menge aller ⑤  $\mathbb{R}$ .

Möchte man alle algebraischen Gleichungen wie beispielsweise  $x^2 + 1 = 0$  lösen, dann muss man durch Einführen der imaginären Einheit  $i := \sqrt{-1}$  diesen Zahlenbereich nochmals erweitern. Es ergibt sich die Menge der ⑥  $\mathbb{C}$ .

Die größte bisher verwendete Zahlenmenge wurde bereits 1843 von Sir William Rowan Hamilton entwickelt und ihm zu Ehren als ⑦  $\mathbb{H}$  bezeichnet.

## Zahlenmengen

### Lösung

1.

|                                      | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{N}$ |
|--------------------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $\frac{3}{-2}$                       | x            | ✓            | ✓            | x            |
| $0, \overline{531}$                  | x            | ✓            | ✓            | x            |
| $-100$                               | ✓            | ✓            | ✓            | x            |
| $\sqrt{33}$                          | x            | ✓            | x            | x            |
| $\frac{-99}{-11} = 9$                | ✓            | ✓            | ✓            | ✓            |
| $\pi$                                | x            | ✓            | x            | x            |
| $\sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5}$ | x            | ✓            | ✓            | x            |
| $\log_6(8)$                          | x            | ✓            | x            | x            |
| $2^{-3} = \frac{1}{8}$               | x            | ✓            | ✓            | x            |

2.

- Falsch, so ergibt die Differenz  $2 - 5 = -3$  keine natürliche Zahl.
- Wahr. Sind a und b zwei verschiedene rationale Zahlen, so ist  $\frac{1}{2} \cdot (a + b)$  diejenige rationale Zahl, die in der Mitte zwischen a und b liegt.
- Wahr, die Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen ist bezüglich der Multiplikation abgeschlossen.
- Wahr, 5 ist eine natürliche Zahl und damit insbesondere reell.
- Falsch, so besitzt die rationale Zahl  $\frac{1}{3}$  mit  $0, \overline{3}$  eine unendliche Dezimaldarstellung.
- Wahr. Die natürlichen Zahlen von 1 bis 6 gehören dazu sowie alle negativen ganzen Zahlen.
- Wahr. Die Menge der ganzen Zahlen ist vollständig in den rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  enthalten.
- Falsch. Beispielsweise ist  $2:3 = \frac{2}{3}$  keine ganze Zahl.
- Wahr. Die reellen Zahlen umfassen neben den rationalen Zahlen auch die irrationalen Zahlen.
- Falsch, die Wurzel einer Quadratzahl wie 9 ist natürlich.
- Wahr, eine Primzahl kann nie eine Quadratzahl sein.

3.

- a)  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ist die Menge der irrationalen Zahlen wie  $\sqrt{3}$  oder die Kreiszahl  $\pi$ .
- b)  $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$  entspricht der Menge der natürlichen Zahlen. Beispiele sind 2 oder 7.
- c)  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$  sind alle rationalen Zahlen außer der Null wie  $\frac{1}{2}$  oder  $-\frac{7}{3}$ .
- d)  $\mathbb{Z}_0^- \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$  sind die ganzen Zahlen, z.B.  $-3$  oder 12.
- e)  $n \cdot 2$  mit  $n \in \mathbb{N}$ : Vielfache von 2, beispielsweise 4 oder 18.
- f)  $\mathbb{R} \setminus ]-\infty; 0[ = \mathbb{R}_0^+$  sind alle positiven reellen Zahlen einschließlich der Null wie 0 oder  $\sqrt{13}$ .
- g)  $\mathbb{Q}_0^- \cap \mathbb{R}_0^- = \mathbb{Q}_0^-$  sind alle negativen rationalen Zahlen wie  $-21$  oder  $-2,34$ .
- h)  $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$  enthält keine Elemente, weil  $\mathbb{N}$  eine Teilmenge von  $\mathbb{Z}$  ist.

4. Die 4 ist eine natürliche Zahl und  $\sqrt{324} = 18$  ebenso.  $\frac{3}{-4}$  und  $0, \bar{7} = \frac{7}{9}$  sind beides Brüche, also rational. Es bleiben  $\pi$  und  $12\sqrt{2}$  als irrationale Zahlen.

5. Die Menge der **natürlichen Zahlen**  $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$  ist die kleinste aller bekannten Zahlenmengen, besitzt jedoch bereits unendlich viele Elemente.

Erweitert man diese um die Null und die negativen ganzen Zahlen, so erhält man mit  $\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$  die Menge  $\mathbb{Z}$  der **ganzen Zahlen**.

Die **rationalen Zahlen**  $\mathbb{Q}$  umfassen alle Zahlen, die in der Form  $\frac{p}{q}$  mit  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $q \neq 0$  geschrieben werden können.

Werden nun noch die **irrationalen Zahlen** (häufig mit  $\mathbb{I}$  bezeichnet) wie  $\sqrt{2}$ , die Kreiszahl  $\pi$  oder die Eulersche Zahl  $e$  hinzugefügt, so ergibt sich die Menge aller **reellen Zahlen**  $\mathbb{R}$ .

Möchte man alle algebraischen Gleichungen wie beispielsweise  $x^2 + 1 = 0$  lösen, dann muss man durch Einführen der imaginären Einheit  $i := \sqrt{-1}$  diesen Zahlenbereich nochmals erweitern. Es ergibt sich die Menge der **komplexen Zahlen**  $\mathbb{C}$ .

Die größte bisher verwendete Zahlenmenge wurde bereits 1843 von Sir William Rowan Hamilton entwickelt und ihm zu Ehren als **Hamiltonsche Quaternionen**  $\mathbb{H}$  bezeichnet.