

e-Funktion • Anwendungen Übung

1. Radioaktiver Zerfall

Radioaktives Radon ^{222}Rn zerfällt nach dem Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$. Dabei ist

t	Zeit in Tagen
$N(t)$	Anzahl der unzerfallenen Kerne zur Zeit t
$N(0) = N_0$	Unzerfallene Kerne zum Startzeitpunkt $t = 0$
λ („lambda“)	Materialabhängige Zerfallskonstante.

In der Rechnung kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind sinnvoll zu runden.

- 1.1. Nach einer Woche sind von 5,00 Mol ^{222}Rn noch 1,40 Mol übriggeblieben. (3 BE)
Bestimmen Sie hiermit die Zerfallskonstante λ .
[Lösung: $\lambda = 0,182$]
- 1.2. Wie viele Teilchen sind von den ursprünglich 5,00 Mol nach zwei Tagen übrig? Ermitteln Sie auch, wie lange es dauert, bis noch 12,5% des ursprünglich vorhandenen Radons unzerfallen ist. (5 BE)
- 1.3. Skizzieren Sie den Graphen der Zerfallsfunktion von Radon in ein geeignetes Koordinatensystem für einen Zeitraum von zwei Wochen ein. (3 BE)
- 1.4. Die Halbwertszeit T ist die Zeitdauer, in der die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Atome zerfallen ist. Entnehmen Sie aus Ihrem Graphen die ungefähre Halbwertszeit und berechnen Sie T anschließend. (4 BE)
- 1.5. Die negative erste Ableitung von $N(t)$ nach der Zeit wird mit Aktivität bezeichnet: (3 BE)

$$A(t) = -\frac{d}{dt}N(t) = -\dot{N}(t)$$

Zeigen Sie: $A(t) = N_0 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t}$. Berechnen Sie die Aktivität von 5,00 Mol Radon zu Beginn der Rechnung und nach 10 Tagen.

2. Intelligenzquotient

Der Intelligenzquotient (IQ) in der Bevölkerung ist nach der Glockenkurve $\varphi: x \mapsto \varphi(x)$ von Gauß mit

$$\varphi(x) = \frac{1}{15\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{-(x-100)^2}{450}}$$

im Definitionsbereich $D_\varphi = [0; 200]$ verteilt. Das bedeutet, dass x den jeweiligen IQ angibt und $\varphi(x)$ den entsprechenden Anteil in der Bevölkerung.

- 2.1. Berechnen Sie den Anteil in der Bevölkerung mit einem Intelligenzquotienten von 90 sowie von 115. (2 BE)
- 2.2. Bestimmen Sie das Extremum (Lage und Art) sowie die Wendepunkte dieser Verteilung. (8 BE)
[Hinweis: $\varphi'''(85) \neq 0$ und $\varphi'''(115) \neq 0$ kann vorausgesetzt werden.]
- 2.3. Skizzieren Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_φ von φ im Definitionsbereich. (4 BE)

3. Zinseszins (exponentielles Wachstum)

Ein zu einem festen Zinssatz p angelegtes Startkapital K_0 entwickelt sich im Laufe der Zeit t (in Jahren) nach der Funktion

$$K(t) = K_0 \cdot (1 + p)^t; t \geq 0.$$

- 3.1. Welches Guthaben besitzt man nach einer Einmaleinlage von.... (3 BE)
 - a) ... 100 € auf ein Sparbuch ($p = 0,25\%$) in 100 Jahren?
 - b) ... 1 000 € bei festverzinslichen Wertpapieren ($p = 4,5\%$) in sieben Jahren?
 - c) ... 100 000 \$ mit einem Aktieninvestment (durchschnittlich 23% pro Jahr) in 65 Jahren?
- 3.2. Begründen Sie rechnerisch, dass man $K(t)$ auch in der Form (2 BE)
$$K(t) = K_0 \cdot e^{t \cdot \ln(1+p)}$$
 schreiben kann.
- 3.3. Wie lange dauert es, bis man bei einem Startkapital von 100 000 € und einem Zinssatz von 8% Millionär geworden ist? (4 BE)
- 3.4. Welchen Zinssatz benötigt man, wenn man mit nur 50 000 € in 40 Jahren zum Millionär werden möchte? (3 BE)
- 3.5. Ein (sehr reicher) Finanzexperte behauptet, die jährliche Inflationsrate betrage 4,5%. Wie lange würde es unter dieser Voraussetzung dauern, bis sich der Wert des Geldes halbiert hat? (4 BE)

4. Pilzwachstum (angelehnt an AP 2005 BOS/FOS 13 nt in Bayern) (Logistisches Wachstum)

Die Anzahl p der Pilze einer Kultur in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden wird für $t \geq 0$ durch den Funktionsterm $p(t) = \frac{1000}{1+7e^{-t}}$ beschrieben. Im Funktionsterm und bei Berechnungen wird auf Benennungen verzichtet.

- 4.1. Bestimmen Sie die Anzahl der Pilze zum Zeitpunkt $t = 0$ und nach sehr langer Beobachtungszeit. Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1 , zu dem die Pilzkultur 875 Pilze enthält. (5 BE)

- 4.2. Nun wird die Ableitungsfunktion $\dot{p}: t \mapsto \dot{p}(t)$ mit $\dot{p}(t) = \frac{dp}{dt}$ und $t \geq 0$ betrachtet. (5 BE)
Interpretieren Sie $\dot{p}(t)$ im gegebenen Sachzusammenhang und zeigen Sie, dass die Anzahl der Pilze im gesamten Beobachtungszeitraum echt monoton zunimmt. [Teilergebnis: $\dot{p}(t) = \frac{7000e^{-t}}{(1+7e^{-t})^2}$]

- 4.3. Ohne Nachweis kann im Folgenden verwendet werden, dass (5 BE)

$$\ddot{p}(t) = \frac{7000e^{-t} \cdot (-1+7e^{-t})}{(1+7e^{-t})^3}.$$

Berechnen Sie damit den Zeitpunkt t_2 , zu dem die Pilzkultur am stärksten zunimmt. Geben Sie die Wachstumsgeschwindigkeit sowie den Pilzbestand zu diesem Zeitpunkt an.

- 4.4. Zeichnen Sie den Graphen von $p(t)$ für $0 \leq t \leq 6$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem. (4 BE)
(Maßstab: t -Achse: 1 h $\hat{=}$ 2 cm; p -Achse: 100 Pilze $\hat{=}$ 1 cm)

5. Verbreitung eines Blogs (Beschränktes Wachstum)

Die Verbreitung eines Blogs im Internet kann durch die Funktion $B(t) = 6000 \cdot (1 - e^{-kt})$ beschrieben werden. Dabei gibt $B(t)$ die Anzahl an Klicks nach der Zeit t in Wochen nach Veröffentlichung an. $k \in \mathbb{R}$ ist eine feste Konstante. Nach einer Woche wurde der Blog genau 2 154-mal geklickt.

- 5.1. Berechnen Sie die Anzahl der Aufrufe des Blogs zu Beginn der Zeitrechnung sowie den Wert der Konstanten $k \in \mathbb{R}$ auf drei Nachkommastellen gerundet. (4 BE)
[Lösung: $k \approx 0,445$]
- 5.2. Wie oft wurde der Blog nach sehr langer Zeit gelesen? (2 BE)
- 5.3. Der Verfasser möchte gerne wissen, wann 4 500 Nutzer den Eintrag gelesen haben. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt auf den Tag genau. (4 BE)
- 5.4. Skizzieren Sie den Graphen von $B(t)$ für die ersten zehn Wochen nach Onlinestellung. (4 BE)

6. Medikamentenabgabe

Nach einem Unfall soll einem Patienten kontinuierlich ein Medikament verabreicht werden. Die verabreichte Menge $n(t)$ kann näherungsweise durch $n(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt}$; $t \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ beschrieben werden. Der Wert $n(t)$ gibt die verabreichte Menge an Schmerzmittel in Milligramm (mg) an und t die seit der Einlieferung vergangene Zeit in Stunden. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

- 6.1. Dem Patienten werden nach einer Stunde 1,78 mg und nach 12 Stunden 2,36 mg an Schmerzmittel verabreicht. Berechnen Sie mit diesen Angaben die reellen Parameter a und b der Funktion n . (4 BE)

Ab hier gilt $a = 2,17$ und $b = 0,20$.

Alle folgenden Ergebnisse sind auf drei geltende Ziffern zu runden.

- 6.2. Bestimmen Sie die maximale Schmerzmittelmenge, die dem Patienten verabreicht worden ist. (5 BE)
[Mögliches Teilergebnis: $\dot{n}(t) = (2,17 - 0,434t) \cdot e^{-0,20t}$]
- 6.3. Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen G_n für die ersten 24 Stunden der Medikamentenabgabe in ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem. (3 BE)

7. Kaffeetemperatur (Beschränkte Abnahme)

Eine Tasse mit frisch gebrühtem Kaffee der Temperatur 80°C kühlt nach der Funktion $T(t) = a + b \cdot e^{-c \cdot t}$ ab. Dabei ist T die von der Zeit t (in Minuten) abhängige Temperatur (in $^\circ\text{C}$) und $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Auf die Angabe von Einheiten soll verzichtet werden. Runden Sie alle Werte gegebenenfalls auf drei Nachkommastellen.

- 7.1. Nach sehr langer Zeit ist der Kaffee auf 20°C abgekühlt. Begründen Sie, dass $a = 20$ und $b = 60$ sein muss. (2 BE)
- 7.2. Nach einer Viertelstunde ist der Kaffee auf 53°C abgekühlt. Berechnen Sie damit den Wert von $c \in \mathbb{R}^+$. (3 BE)
[Ergebnis: $c = 0,040$]
- 7.3. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von T keine Wendepunkte besitzt. (3 BE)
- 7.4. Berechnen Sie $\dot{T}(60) = \frac{dT}{dt}(60)$ sowie $\frac{T(75)-T(45)}{75-45}$. Interpretieren Sie beide Werte im Sachzusammenhang. (4 BE)
- 7.5. Skizzieren Sie den Graphen von T für die ersten zwei Stunden des Abkühlungsprozesses. (3 BE)

e-Funktion • Anwendungen

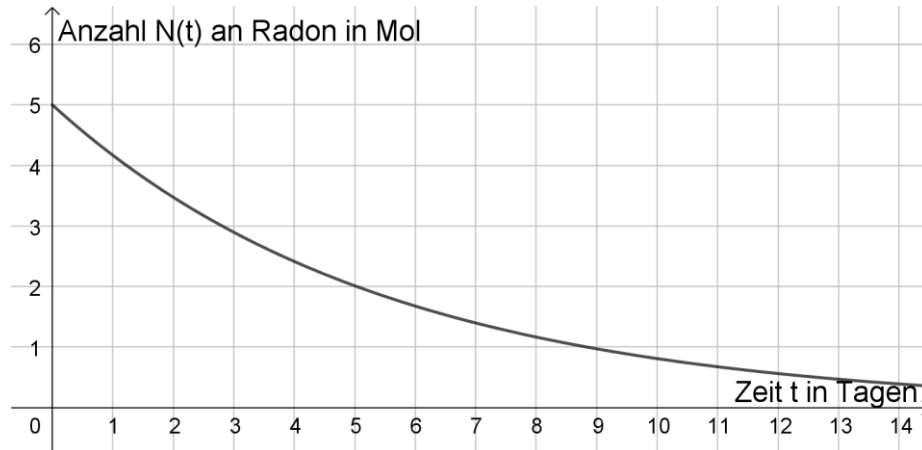
Lösung

1. Radioaktiver Zerfall

1.1. $\lambda = \frac{\ln(0,28)}{-7} \approx 0,182 \left(\frac{1}{d}\right)$; die Einheit d gibt die Anzahl der Tage an.

1.2. $N(2) \approx 3,47$ (Mol); $N(t) = 0,125 \cdot N_0$ gilt nach 11,4 Tagen.

1.3.



1.4. $T = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-0,182} \approx 3,81$ (d)

1.5. $A(t) = 0,91 \cdot e^{-0,182t}$

$$A(0) = 0,91 \left(\frac{\text{Mol}}{d}\right)$$

$$A(10) \approx 0,147 \left(\frac{\text{Mol}}{d}\right)$$

2. Intelligenzquotient

2.1.

$$\varphi(90) \approx 0,0377, \text{ also ca. } 3,77\%$$

$$\varphi(115) \approx 0,0286, \text{ d.h. rund } 2,86\%$$

2.2.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-100)^2}{450}} \cdot \left(\frac{-2(x-100)}{450}\right) = \frac{-1}{3375\sqrt{2\pi}} (x-100) \cdot e^{\frac{-(x-100)^2}{450}}$$

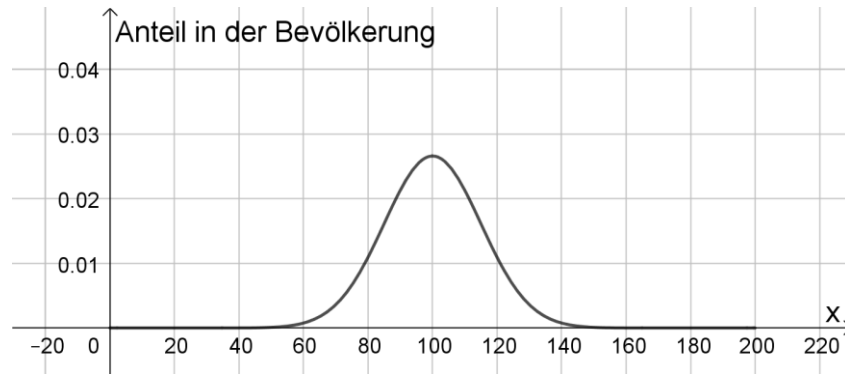
$$\varphi''(x) = \frac{-1}{3375\sqrt{2\pi}} \cdot \left(1 - \frac{(x-100)^2}{225}\right) \cdot e^{\frac{-(x-100)^2}{450}}$$

$$\text{HOP}(100; 0,02660)$$

$$\text{WEP}_1(85; 0,01613)$$

$$\text{WEP}_2(115; 0,01613)$$

2.3.



3. Zinseszins

3.1.

- a) $100 \text{ €} \cdot (1 + 0,0025)^{100} \approx 128,36 \text{ €}$
- b) $1\,000 \text{ €} \cdot (1 + 0,045)^7 \approx 1\,360,86 \text{ €}$
- c) $100\,000 \text{ \$} \cdot 1,23^{65} \approx 69,8 \text{ Mrd. \$}$

Wenn Sie denken, eine derartige Rendite ist auf so lange Sicht nicht möglich, dann informieren Sie sich doch bitte über den US-Investor Warren Buffett. Er hat 1965 mit 100 000 \$ begonnen zu investieren und eine durchschnittliche Jahresrendite von ca. 23 % erreicht.

3.2. Ein Basiswechsel funktioniert nach dem Prinzip $K_0 \cdot (1 + p)^t = K_0 \cdot e^{\ln((1+p)^t)}$, da sich e und ln gegenseitig aufheben. Mit den Logarithmusgesetzen kann man das t vor den ln stellen und erhält direkt $K(t) = K_0 \cdot e^{t \cdot \ln(1+p)}$

3.3. $t \approx 29,92 \text{ a}$ (Hinweis: Ein Rechnen mit der Formel aus 3.2. erleichtert die Arbeit etwas.)

3.4. $p \approx 7,78\%$

3.5. $T_{1/2} \approx 15,05 \text{ a}$; a ist das Kürzel für Jahre.

4. Pilzwachstum

4.1. $p(0) = 125$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 1000$$

$$t_1 = \ln 49 \approx 3,89$$

4.2. $\dot{p}(t)$ gibt die Wachstumsgeschwindigkeit der Pilzkultur an.

$$\dot{p}(t) = \frac{0 \cdot (1+7e^{-t}) - 1000 \cdot (1+7e^{-t}) \cdot (-7e^{-t})}{(1+7e^{-t})^2} = \frac{7000e^{-t}}{(1+7e^{-t})^2}$$

Wegen $7000e^{-t} > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $(1 + 7e^{-t})^2 > 0$ für alle $t \geq 0$ ist $\dot{p}(t) \geq 0$
 $\Rightarrow p(t)$ ist echt monoton zunehmend für $t > 0$.

4.3. $\ddot{p}(t) = 0 \Leftrightarrow -1 + 7e^{-t} = 0$

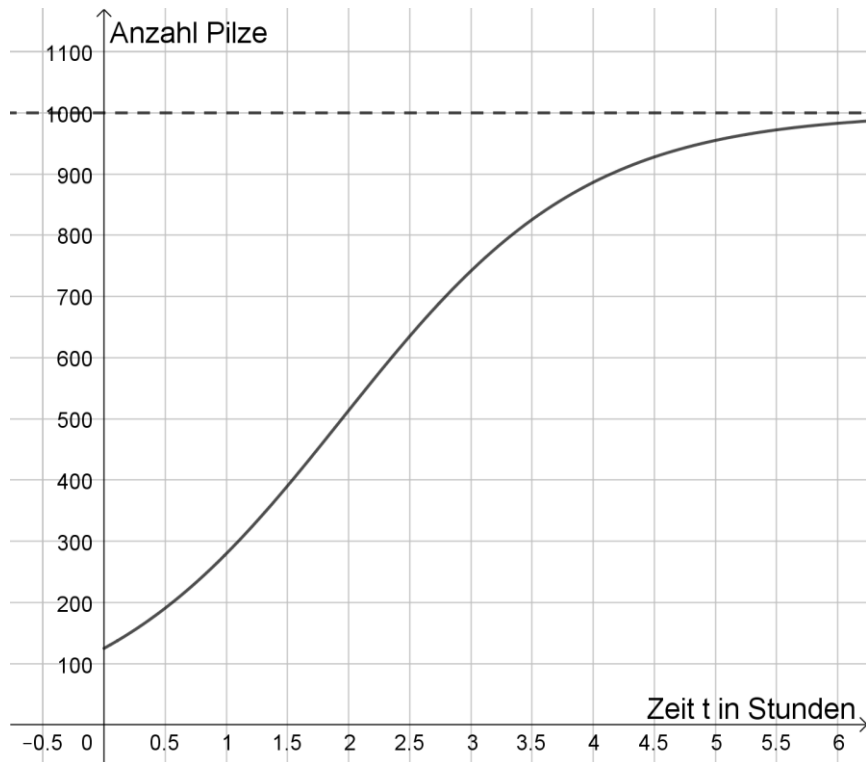
$$t_2 = \ln(7) \approx 1,95$$

Wachstumsgeschwindigkeit $\dot{p}(t_2) = 250$ (Pilze pro Stunde)

Pilzbestand $p(t_2) = 500$

4.4.

t/h	0	1	$\ln(7)$ $\approx 1,95$	3	4	5	6
p(t) (0 NKS)	125	280	500	742	886	955	983



5. Verbreitung eines Blogs

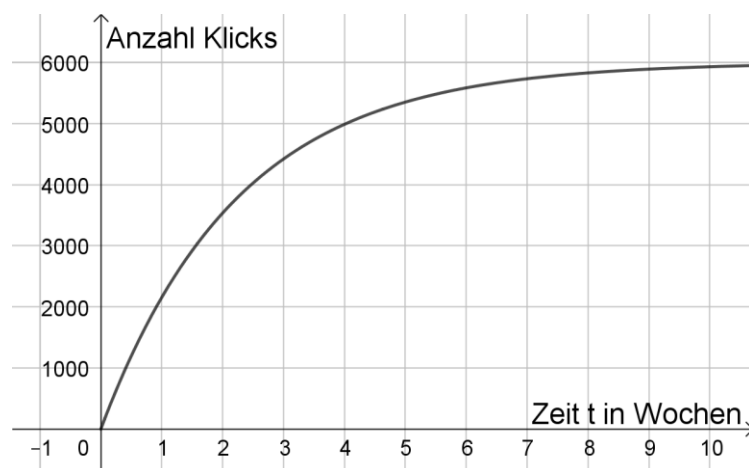
5.1. $B(0) = 0$;

$B(1) = 2154 \Rightarrow k \approx 0,445$

5.2. $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 6\,000$

5.3. $B(t) = 4500 \Rightarrow t \approx 3,12$, es dauert also rund 22 Tage.

5.4.



6. Medikamentenabgabe

$$6.1. n(1) = 1,78 \Leftrightarrow a \cdot e^{-b} = 1,78 \Leftrightarrow a = 1,78 \cdot e^b \quad (I)$$

$$n(12) = 2,36 \Leftrightarrow 12a \cdot e^{-12b} = 2,36 \quad (II)$$

(I) in (II): ergibt $b \approx 0,20$

$$\text{in (I): } a = 1,78 \cdot e^{-0,2} \approx 2,17$$

$$6.2. \text{ Ab hier ist } n(t) = 2,17t \cdot e^{-0,20t}.$$

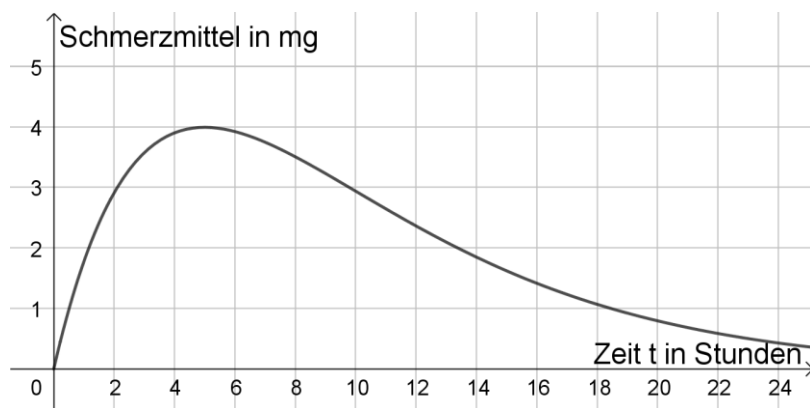
$$\dot{n}(t) = 1,08 \cdot e^{-0,2t} + 1,08t \cdot e^{-0,2t} \cdot (-0,2) = 1,08 \cdot (1 - 0,2t) \cdot e^{-0,2t}$$

$$\dot{n}(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5$$

Wegen $1,08 \cdot e^{-0,2t} > 0$ ist nur der Ausdruck $y = 1 - 0,2t$ ausschlaggebend für den Vorzeichenwechsel (VZW) von $\dot{n}(t)$.

Es handelt sich dabei um einen VZW von „+“ nach „-“ bei $t = 5$, also befindet sich ein Maximum bei HOP(5; 3,99).

6.3.



7. Kaffeetemperatur

$$7.1. \lim_{t \rightarrow \infty} a + b \cdot e^{-c \cdot t} = 20 \Rightarrow a = 20$$

Wegen $T(0) = a + b = 80$ muss $b = 60$ gelten

$$7.2. T(15) = 53$$
$$20 + 60 \cdot e^{-15c} = 53$$
$$60 \cdot e^{-15c} = 33$$
$$e^{-15c} = \frac{33}{60}$$
$$-15c = \ln\left(\frac{33}{60}\right)$$
$$c = \frac{\ln\left(\frac{33}{60}\right)}{-15} \approx 0,040$$

$$7.3. \dot{T}(t) = 60 \cdot e^{-0,040 \cdot t} \cdot (-0,040) = -2,4 \cdot e^{-0,040 \cdot t}$$
$$\ddot{T}(t) = -2,4 \cdot e^{-0,040 \cdot t} \cdot (-0,040) = 0,096 \cdot e^{-0,040 \cdot t}$$
$$\ddot{T}(t) = 0 \Leftrightarrow 0,096 \cdot e^{-0,040 \cdot t} = 0 \text{ nicht möglich, da } e^{-0,040 \cdot t} > 0$$

7.4. $\dot{T}(60) \approx -0,218$

Der Kaffee kühlt nach einer Stunde um $0,218^\circ\text{C}$ pro Minute ab.

$$\frac{T(75)-T(45)}{75-45} \approx -0,231$$

In der Zeit zwischen der 45. und der 75. Minute kühlt der Kaffee um durchschnittlich $0,231^\circ\text{C}$ pro Minute ab.

7.5. Es ist $T(120) \approx 20,494$.

